

Numéro d'anonymat : QUELQUES INDICATIONS

B02. Suites et séries. Primitives
Examen final

Jeudi, 11 mai 2006

Les notes et les calculatrices sont interdites. Durée de l'épreuve : 2 heures.

La rédaction doit se faire sur cette feuille ; vous pouvez continuer sur la copie le cas échéant.

Le barème est donné à titre purement indicatif. Toutes les questions sont indépendantes ; elles peuvent être répondues dans n'importe quel ordre.

1. [6 pts] Soit (u_n) une suite de nombres réels. Pour chacun des énoncés suivant, dire s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse (soit par un théorème ou une démonstration si vous pensez que l'énoncé est vrai, soit en donnant un contre-exemple si vous pensez qu'il est faux).

(a) Si la suite (u_n^2) converge, alors la suite (u_n) converge. Non !

La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ ne converge pas tandis que $u_n^2 = 1$ et (u_n^2) est la suite constante.

(b) Si la suite $(\cos u_n)$ converge, alors la suite $(\sin u_n)$ converge. Non !

Par exemple, en prenant $u_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in \mathbb{N}$, on a $\cos u_n = 0$ et donc $(\cos u_n)$ converge (constante) tandis que $\sin u_n = (-1)^n$ et $(\sin u_n)$ ne converge pas.

(c) On suppose $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$. Alors, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N , on ait $u_{n+1} \leq u_n$. Non !

Par exemple, la suite de terme général $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n = \text{pair} > 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n = \text{impair} \end{cases}$

vérifie $u_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\lim u_n = 0$

mais $u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} > \frac{1}{(2n)^2} = u_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$

(d) Si la suite (u_n) converge, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$. Oui!

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

(e) On suppose $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, si la suite (u_n) converge, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Non.

Par exemple, en prenant $u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n = \text{pair} > 0 \\ \frac{1}{n} & \text{si } n = \text{impair} \end{cases}$

$u_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ mais $\frac{u_{2p+1}}{u_{2p}} = \frac{(2p)^2}{2p+1} \rightarrow +\infty \quad \frac{u_{2p}}{u_{2p-1}} = \frac{2p-1}{(2p)^2} \rightarrow 0$

(f) On suppose $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4}$. Alors, la suite (u_n) converge vers 0. Oui.

Soit $l = \frac{3}{4}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow l \Leftrightarrow [\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0 : n \geq N \Rightarrow |\frac{u_{n+1}}{u_n} - l| < \varepsilon]$. En choisissant $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$, on aura $\frac{u_{n+1}}{u_n} < \frac{1+l}{2} < 1$ à partir d'un certain rang N .

$\Rightarrow \forall n \geq N : 0 \leq u_n \leq \left(\frac{1+l}{2}\right)^{n-N} \quad u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ car $\frac{1+l}{2} = \frac{1+3/4}{2} < 1$



2. [6 pts] On considère une suite (u_n) telle que $u_0 \in]0, 2\pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \sin u_n$. Montrer que la suite (u_n) converge vers π .

On considère $f: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \sin x$. On a $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \Rightarrow f$ croissante. $f(0) = 0, f(2\pi) = 2\pi \Rightarrow f: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$.

Si la suite (u_n) admet une limite l , alors $l = f(l) \Rightarrow l \in \{0, \pi, 2\pi\}$.

Si $u_0 = \pi \Rightarrow f(u_0) = \pi \Rightarrow u_n = \pi \quad \forall n$.

Si $u_0 \in]0, \pi[\Rightarrow u_1 = u_0 + \sin u_0$ vérifie $u_0 < u_1 < \pi \Rightarrow (u_n)$ $\uparrow$ et majorée $\Rightarrow u_n \uparrow \pi$.

Si $u_0 \in]\pi, 2\pi[\Rightarrow u_1 = u_0 + \sin u_0$ vérifie $\pi < u_1 < u_0 \Rightarrow (u_n)$ $\downarrow$ et minorée $\Rightarrow u_n \downarrow \pi$.

3. [3 pts] Soit $a \in \mathbb{R}^*$. En utilisant des intégrations par parties, calculer les primitives suivantes :

(a) $\int t \sin at \, dt = -\frac{1}{a} \int t \, d(\cos at) = -\frac{1}{a} \cos at + \frac{1}{a} \int \cos at \, dt$

$= -\frac{1}{a} \cos at + \frac{1}{a^2} \int d(\sin at)$

$= -\frac{1}{a} \cos at + \frac{1}{a^2} \sin at + C$

$$(b) \int t^2 \cos at \, dt = \frac{1}{a} \int t^2 d(\sin at) = \frac{1}{a} t^2 \sin at - \frac{2}{a} \int t \sin at \, dt$$

(en utilisant (a))

$$= \frac{1}{a} t^2 \sin at + \frac{2}{a^2} t \cos at - \frac{2}{a^3} \sin at + C.$$

4. [3 pts] En utilisant des intégrations par parties, calculer les primitives suivantes :

$$(a) \int \frac{e^{2t}}{1+e^{2t}} dt = \int \frac{x^2}{1+x^2} \frac{dx}{x} = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \int d(\ln(1+x^2)) = \frac{1}{2} \ln(1+e^{2t}) + C.$$

$$(b) \int \frac{1}{\cosh t} dt = \int \frac{2}{x + \frac{1}{x}} \frac{dx}{x} = 2 \int \frac{dx}{1+x^2} = 2 \int d(\arctan x)$$

$$= 2 \arctan(e^t) + C.$$

5. [3 pts] On considère une série $\sum u_n$ de terme général u_n . Dans chacun des cas suivants, déterminer si la série est convergente ou non. Justifier votre réponse.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Oui, car

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \Delta_n = u_1 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n+1)^{\frac{1}{n}} - n^{\frac{1}{n}}$. Oui, car

$$u_n = n^{\frac{1}{n}} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]. \text{ Or le développement limité de}$$

$$(1+x)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}x + \frac{1}{2}x^2 \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow 0} \varepsilon(x) = 0 \Rightarrow u_n = n^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \right)$$

Or $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1 \Rightarrow (n^{\frac{1}{n}})$ est une suite bornée $\Rightarrow$

$$0 \leq u_n \leq \frac{K}{n^2} + \frac{K}{n^2} \varepsilon(n) \text{ et } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge.}$$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{e^{i\theta n}}{n}$ où θ est un nombre réel, non multiple entier de

2π . Oui, car on utilise le critère d'Abel, avec

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \text{ et } v_n = e^{in\theta}, \text{ on a } V_{n,p} = u_n + \dots + u_{n+p} = e^{in\theta} (1 + \dots + e^{ip\theta})$$

Puisque $\theta \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $e^{i\theta} \neq 1 \Rightarrow$

$$|V_{n,p}| \leq |e^{in\theta}| \left| \frac{e^{i(p+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right| \leq \frac{1}{|\sin \theta/2|} \text{ et } \sin \theta/2 \neq 0$$

$$\Rightarrow |u_n + \dots + u_{n+p}| \leq \frac{1}{|\sin \theta/2|} \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} \right|$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{|\sin \theta/2|} \rightarrow 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est une suite de Cauchy}$$

6. [5 pts] On considère une suite (u_n) de nombres réels et la série $\sum u_n$ de terme général u_n . Pour chacun des énoncés suivant, dire s'il est vrai ou faux. Justifier votre réponse (soit par un théorème ou une démonstration si vous pensez que l'énoncé est vrai, soit en donnant un contre-exemple si vous pensez qu'il est faux).

- (a) On suppose $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, si la série $\sum u_n$ converge, la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge vers une limite ℓ telle que $\ell < 1$.

Faux. $\sum \frac{1}{n^2}$ converge or $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$

- (b) On suppose $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, si la série $\sum u_n$ converge, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N , on ait $u_{n+1} \leq u_n$.

Faux. Considérer la série de terme général

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n = \text{pair} \\ \frac{1}{2^n} & \text{si } n = \text{impair} \end{cases} \quad \sum u_n \text{ converge mais } (u_n) \text{ n'est pas monotone -}$$

- (c) On suppose $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, si la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum u_n^2$ converge aussi.

Vrai. Si $\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \rightarrow 0 \Rightarrow$ à partir d'un certain rang N , $u_n < 1 \Rightarrow 0 \leq u_n^2 < u_n$ et comme $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ conv.

- (d) Si ~~la suite~~ $\lim_{n \rightarrow +\infty} ((-1)^n n^2 u_n) = 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Vrai. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^2 u_n = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 |u_n| = 1 \Rightarrow$ par critère de Riemann, la série $\sum |u_n|$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge absolument.

- (e) Si ~~la suite~~ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n n u_n = 1$, la série $\sum u_n$ converge.

Faux. Par exemple, si $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \log n}$, la suite (u_n) vérifie $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n u_n = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{\log n} = 1$ mais $\sum u_n$ diverge car $\sum \frac{1}{n \log n}$ diverge. - Fin de l'épreuve.