

Couqué du BO2

S2

Exercice 1. a) Faux. Si $\forall n, u_n = (-1)^n$, la suite (u_n) ne converge pas. Mais, $\forall n, u_n^2 = 1$ donc (u_n^2) converge.

b) Faux. Soit $\forall n, u_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$. On a $\forall n, \cos u_n = 0$ donc $(\cos u_n)$ converge, mais $\forall n, \sin u_n = (-1)^n$ donc $(\sin u_n)$ ne converge pas.

c) Faux. Par exemple, si $\forall n, u_{2n} = \frac{1}{2n+2}$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$, on a

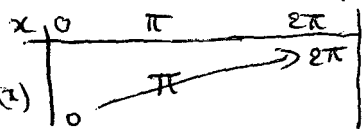
$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, mais $\forall n, u_{2n} < u_{2n+1}$ donc la suite (u_n) n'est pas décroissante à partir d'un certain rang.

d) Vrai. Si $l = \lim u_n$, alors $\lim u_{n+1} = l$ et $\lim u_{n+1} - u_n = l - l = 0$.

e). Faux. Si $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n > 0$, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$ donc $\lim (u_{n+1} - u_n) = 0$. Mais la suite (u_n) est divergente, car c'est la série harmonique.

f) Faux. Soit pour $n > 0, u_n = \frac{1}{e^n}$. On a $\forall n, u_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e}$. Cependant, la suite (u_n) converge (vers 0).

Exercice 2. Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in [0, 2\pi], f(x) = x + \sin x$. On a $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0$, donc f est croissante. Et



$$f(0) = 0, f(\pi) = \pi, f(2\pi) = 2\pi.$$

Un réel l est point fixe de f si $\sin l = 0$,

c'est à dire $l \in \mathbb{Z}\pi$.

- Si $u_0 = \pi$, on a $\forall n, u_n = \pi$, donc la suite stationne à π .
- Si $0 < u_0 < \pi$, on a $u_1 = u_0 + \sin u_0 > u_0$.

supposons que u vérifie $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \pi$. Alors, on a

$$0 \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq \pi, \text{ donc } 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \pi.$$

Par récurrence, la suite (u_n) vérifie $\forall n, 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \pi$.

Elle est croissante et majorée par π . Donc elle converge, vers un point fixe l de f t.q. $l \in [u_0, \pi]$. D'où $l = \pi$.

• Si $\pi < u_0 < 2\pi$, on a $\pi \leq u_1 \leq u_0 < 2\pi$ et comme précédemment, $\forall n$, $\pi \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_0 < 2\pi$. Donc (u_n) est décroissante et majorée par π , converge vers un point fixe $l \in [\pi, u_0]$ donc $l = \pi$.

Si $u_0 = \frac{2\pi}{3}$, on a $\forall n$, $\pi \leq u_n \leq u_0 = \frac{2\pi}{3}$.

Si $x \in [\pi, \frac{2\pi}{3}]$, on a $|f'(x)| = |1 + \cos x| \leq 1 + \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|f(u_n) - f(\pi)| \leq \sup_{x \in [\pi, \frac{2\pi}{3}]} |f'(x)| |u_n - \pi| \quad \text{donc} \quad |u_{n+1} - \pi| \leq \frac{1}{2} |u_n - \pi|.$$

On en déduit par récurrence sur n , que $\forall n$, $|u_n - \pi| \leq \frac{1}{2^n} |u_0 - \pi| \leq \frac{\pi}{3 \times 2^n}$.

La suite converge au moins aussi vite que la suite géométrique

$$\frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2^n} \right). \quad \text{Pour avoir } |u_n - \pi| \leq 10^{-2}, \text{ il suffit d'avoir}$$

$$\frac{\pi}{3 \times 2^n} < 10^{-2} \quad \text{ou même} \quad \frac{1}{2^n} < \frac{1}{100}. \quad \text{Comme } 2^7 = 128, \text{ il suffit}$$

de prendre $n \geq 7$.

Exercice 3. 1) - La série converge car $\forall n > 0$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc

$$s_n = u_1 + \dots + u_n = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \lim s_n = 1.$$

2) $\forall n > 0$, $u_n = n^{1/n} \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n} - 1 \right)$. - donc $u_n > 0$. Soit.

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1/n} - 1; \quad \text{comme} \quad \lim n^{1/n} = \lim \left(\exp \frac{1}{n} \ln n\right) = 1, \text{ on}$$

sait que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Soit $w_n = \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

$$\text{On a } v_n = \frac{\exp w_n - 1}{w_n}. \quad \text{Comme } \lim w_n = 0 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\exp x - 1}{x} = 1,$$

on a $\lim \frac{\exp w_n - 1}{w_n} = 1$. - Donc $\lim \frac{v_n}{w_n} = 1$; par suite les

séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature. Puis $w_n = \frac{1}{n^2} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$

où $\lim \frac{\ln(1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1$, donc $\sum w_n$ est de même nature que la

série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ c'est à dire convergente.

Donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 4. 1) On a $|u_n| = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$

$$\frac{1}{n^2 + \frac{1}{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} \quad \text{• Si } \left[\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2} \right], \text{ la suite } (u_n) \text{ ne tend}$$

pas vers 0, donc la série diverge.

Si $\boxed{\alpha > -\frac{1}{2}}$, on a $\lim u_n = 0$. Comme la série est alternée, elle converge dès que $(|u_n|)$ est décroissante, au moins à partir d'un certain rang. Soit $f(x) = x^\alpha - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$. On a $f'(x) = x^{\alpha-1} \sqrt{x} \left(\alpha \sqrt{1+\frac{1}{x}} + \alpha + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}} + \frac{1}{2} \right)$. Donc $f'(x)$ a le signe de la parenthèse - Celle-ci tend vers $2\alpha+1$ à l'infini, donc $\exists N \in \mathbb{N} \forall x \geq N, f'(x) > 0$ - et f est croissante sur $[N, +\infty[$. Donc $(|u_n|)_{n \geq N}$ est décroissante et la série converge.

2), Comme $\lim \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{2}$ la série $\sum |u_n|$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^{\alpha+1/2}}$ - qui est une série de Riemann. Donc, la série $\sum u_n$ est absolument convergentessi $\alpha + \frac{1}{2} > 1$ c.à.d. $\boxed{\alpha > \frac{1}{2}}$

Exercices 1) Faux - exemple si $\forall n > 0, u_n = \frac{1}{n^2}$, la série $\sum u_n$ converge (série de Riemann) et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2}$ donc $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

2) Faux - Soit $\forall n, u_{2n} = \frac{1}{(2n+2)^2}$ et $u_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}$ - On a $\forall n, u_n > 0, \lim u_n / \frac{1}{n^2} = 1$ donc $\sum u_n$ est de même nature que $\sum \frac{1}{n^2}$ - Elle converge. Mais $\forall n, u_{2n} < u_{2n+1}$. Donc (u_n) ne peut décroître à partir d'un certain rang.

3) Vrai - Si $\sum u_n$ converge, on a $\lim u_n = 0$. Donc, il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, 0 < u_n < 1$ - d'où $\forall n \geq N, 0 < u_n^2 \leq u_n$ - Comme $\sum u_n$ converge, $\sum u_n^2$ converge aussi.

4) Si $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3}{4}$, le critère de d'Alembert, appliqué à la série à termes > 0 $\sum u_n$ montre qu'elle converge, donc $\lim u_n = 0$. L'énoncé est Vrai.

5) Si $\lim (-1)^n n^2 u_n = 1$, on a $\lim |u_n| / \frac{1}{n^2} = 1$, donc $\sum |u_n|$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ sont de même nature c.à.d convergentes. Donc $\sum u_n$ converge absolument, donc converge. Vrai.

6) Faux - (chercher une série telle que $u_n = \frac{(-1)^n}{n} (1 + \epsilon_n)$ avec $\lim \epsilon_n = 0$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n} \epsilon_n$ diverge.) Soit pour $n \geq 2$,

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln n} \quad \text{On a bien } \lim (-1)^n n u_n = 1. \text{ La série}$$

$\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est la série harmonique alternée donc converge. Supposons que $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{1}{n \ln n}$ converge.

Soit $f: [e, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ - On a pour $x \in [k, k+1[$,
 $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$.

$$f(x) \leq \frac{1}{k \ln k} \quad \text{donc} \quad \int_k^{k+1} \frac{dx}{x \ln x} \leq \frac{1}{k \ln k} \quad \text{et.}$$

$$\int_e^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} = S_n. \quad \text{Posant } u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x},$$

$$\text{on obtient} \quad \int_e^{n+1} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln e}^{\ln n+1} \frac{du}{u} = \ln \left[\frac{\ln n+1}{\ln e} \right].$$

Donc l'intégrale tend vers $+\infty$ - alors que (S_n) est bornée
 Contradiction. La série $\sum u_n$ diverge.