

Exercice 1

Soit $ABCD$ un carré de centre O . Soit Γ l'ensemble des points M du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\| = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\|.$$

1. Parmi les points O, A, B, C, D , quels sont ceux qui appartiennent à Γ ?
2. Identifier le barycentre des points $(B, 1), (C, -1), (D, 1)$, puis le barycentre des points $(A, 1), (B, -1), (D, -1)$.
3. Déterminer l'ensemble Γ .

1- Pour chacun des points proposés, on calcule $a = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\|$ et $b = \|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\|$.
En utilisant la relation de Chasles et les propriétés du carré : diagonales de même longueur et se coupant en leur milieu, côtés de même longueur, on obtient

- pour $M = O$: $a = \|\overrightarrow{OC}\|$ et $b = \|\overrightarrow{OA}\|$, $a = b$, donc O appartient à Γ .
- pour $M = A$: $a = \|\overrightarrow{0}\|$ et $b = \|\overrightarrow{AC}\|$, $a \neq b$, donc A n'appartient pas à Γ .
- pour $M = B$: $a = \|\overrightarrow{CD}\|$ et $b = \|\overrightarrow{DA}\|$, $a = b$, donc B appartient à Γ .
- pour $M = C$: $a = \|\overrightarrow{CA}\|$ et $b = \|\overrightarrow{0}\|$, $a \neq b$, donc C n'appartient pas à Γ .
- pour $M = D$: $a = \|\overrightarrow{CB}\|$ et $b = \|\overrightarrow{BA}\|$, $a = b$, donc D appartient à Γ .

2- Le barycentre G des points $(B, 1), (C, -1), (D, 1)$ est défini par la relation :

$$\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0},$$

on peut encore écrire $\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$, d'où $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{DC}$. Comme $ABCD$ est un carré $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, donc $G = A$.

Le barycentre G' des points $(A, 1), (B, -1), (D, -1)$ est défini par la relation :

$$\overrightarrow{G'A} - \overrightarrow{G'B} - \overrightarrow{G'D} = \overrightarrow{0},$$

on peut encore écrire $-\overrightarrow{G'A} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$ et $-\overrightarrow{G'A} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, d'où $\overrightarrow{G'A} = -\overrightarrow{AC}$, donc $G = C$.

3- A est le barycentre des points $(B, 1), (C, -1), (D, 1)$ donc $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0}$.
 $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MA}$

C est le barycentre des points $(A, 1), (B, -1), (D, -1)$ donc $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$
 $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{MC}$

L'ensemble Γ est l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MC}\|$, c'est donc la médiatrice du segment $[AC]$, c'est à dire la droite (BD) , puisque dans un carré les diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1, 0, 4)$, $B(0, 0, 6)$, et $C(0, 5, 0)$.

1. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) . (AB) coupe l'axe des abscisses au point D , montrer que les coordonnées de D sont $(3, 0, 0)$.
(b) Montrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.
(c) Donner un vecteur normal au plan P défini par A, B, C . En déduire une équation cartésienne de P .
2. Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC .
(a) Démontrer que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (ODH) .
(b) En déduire que (DH) est la hauteur issue de D dans le triangle DBC .
(c) Déterminer une équation cartésienne du plan P' défini par les points O, D, H .
(d) Vérifier que $(DH) = P \cap P'$, en déduire une représentation paramétrique de la droite (DH) .

1 - (a) Nous avons $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est donnée par :

$$(1) \begin{cases} x = 1 - \lambda, & \lambda \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = 4 + 2\lambda. \end{cases}$$

Cette droite coupe l'axe des abscisses en un point $D = (x_D, 0, 0)$. D'autre part nous savons en vertu de (1) que $\lambda = -2$, ce qui donne $x_D = 3$ et $D = (3, 0, 0)$

(b) On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. On peut aisément vérifier qu'il n'existe pas un $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = \kappa \overrightarrow{AB}$.

(c) Soit $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ un vecteur normal au plan P , alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, qui impliquent

$$\begin{cases} -1 + 2\beta = 0 \\ -1 + 5\alpha - 4\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{5} \text{ et } \beta = \frac{1}{2}.$$

Donc $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Un point $M(x, y, z) \in P$ ssi $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, qui est équivalent à $x + \frac{3}{5}y + \frac{1}{2}z - 3 = 0$. Ainsi une équation cartésienne de P est donnée par

$$(2) P : x + \frac{3}{5}y + \frac{1}{2}z - 3 = 0.$$

2- (a) Nous avons $(BC) \perp (OD)$ car cette dernière droite est perpendiculaire au plan (OBC) . Ainsi la droite (BC) est orthogonale à la fois à (OH) et (OD) (qui sont sécantes), d'où (BC) est perpendiculaire au plan (ODH) .

(b) La droite (BC) est perpendiculaire au plan (ODH) donc elle est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan. En particulier on a $(BC) \perp (DH)$.

(c) Le vecteur $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P' . En faisant exactement comme dans 2 - (c) on

trouve comme équation cartésienne du plan (3) $P' : -5y + 6z = 0$

(d) Nous avons trivialement $(DH) \subset P'$. D'un autre côté $D \in P$ car $D \in (AB)$ et $H \in P$ car $H \in (BC)$, donc la droite $(DH) \subset (ABC) = P$. D'où $(DH) \subset P \cap P'$ mais ces deux plans ne sont pas parallèles, ce qui donne $(DH) = P \cap P'$. D'après 2 et (3), on a $M(x, y, z) \in (DH)$ ssi

$$\begin{cases} x + \frac{3}{5}y + \frac{1}{2}z - 3 = 0 \\ -5y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{61}{50}z + 3 \\ y = \frac{6}{5}z \\ z = z \end{cases}$$

Exercice 3

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(5, 1)$, $B(2, -3)$ et $C(1, -1)$.

1. Soit M un point de coordonnées (x, y) et M' l'image de M par la symétrie centrale s de centre C . Exprimer les coordonnées (x', y') de M' en fonction des coordonnées de M .
2. On désigne par t la translation de vecteur $\vec{AB}$. Ecrire les coordonnées (x', y') de l'image M' d'un point $M(x, y)$ par t .
3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $t \circ s$.
4. On désigne par s' la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC) . Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $s' \circ s$.

1- M' est l'image de M par s , symétrie de centre C , signifie que C est le milieu de $[MM']$, on a donc :

$$\frac{x + x'}{2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{y + y'}{2} = -1$$

ce qui donne

$$x' = -x + 2 \quad y' = -y - 2.$$

2- M' est l'image de M par t , translation de vecteur $\vec{AB}$, signifie que

$$\vec{MM'} = \vec{AB}$$

comme $\vec{AB} = (-3, -4)$, on obtient les coordonnées de M' en fonction de celles de M :

$$x' = x - 3 \quad y' = y - 4.$$

3- On note $M' = s(M)$ et $M'' = t(M')$, on aura donc $M'' = t \circ s(M)$. Les relations entre les coordonnées sont

$$x'' = x' - 3 = (-x + 2) - 3 = -x - 1 \quad y'' = y' - 4 = (-y - 2) - 4 = -y - 6.$$

on obtient les coordonnées de M'' en fonction de celles de M :

$$x'' = -x - 1 \quad \text{et} \quad y'' = -y - 6.$$

On a $\frac{x + x''}{2} = -\frac{1}{2}$ et $\frac{y + y''}{2} = -3$, on en déduit que le milieu de $[MM'']$ est un point fixe C' , $t \circ s$ est donc la symétrie centrale de centre $C'(-\frac{1}{2}, -3)$.

4- s' désigne la symétrie orthogonale par rapport à la droite (AC) . La symétrie centrale de centre C , est la rotation de centre C et d'angle π , elle peut s'écrire comme la composée de deux symétries orthogonales $s = s_{D_2} \circ s_{D_1}$, où D_1 et D_2 sont deux droites sécantes en C et telles que $(D_1, D_2) = \pi/2$.

$s' \circ s = s_{(AC)} \circ s_{D_2} \circ s_{D_1}$, on peut choisir $D_2 = (AC)$, on a alors $s_{(AC)} \circ s_{D_2} = id$.

On obtient finalement $s' \circ s = s_{D_1}$, où D_1 est la droite perpendiculaire à (AC) , passant par C .

On peut déterminer l'équation de cette droite : $M(x, y)$ appartient à D_1 si et seulement si le produit scalaire $\vec{CM} \cdot \vec{CA}$ est nul.

On obtient l'équation de D_1 : $2x + y - 1 = 0$. On peut remarquer que cette droite passe par B .

$s' \circ s$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite (CB) d'équation $2x + y - 1 = 0$.

Exercice 4

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ensemble

$$\mathcal{C} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \right\}.$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et Δ_α la droite passant par le point $A(0; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (1, \alpha)$.

1. (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est un cercle de centre $I(3, 1)$, déterminer son rayon R .
 (b) Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne de Δ_α .
 (c) Calculer la distance de I à Δ_α , en déduire que Δ_α coupe $\mathcal{C}$ en deux points si et seulement si $\alpha \in [0; \frac{2}{\sqrt{5}}[$.
 Pour quelle valeur de α , la droite Δ_α est-elle tangente au cercle $\mathcal{C}$?
2. On se place dans le cas : $\alpha \in [0; \frac{2}{\sqrt{5}}[$.
 (a) Montrer que les points d'intersection B_α et C_α de Δ_α et $\mathcal{C}$ ont pour abscisses respectives :

$$x_{B_\alpha} = \frac{3 - \sqrt{4 - 5\alpha^2}}{1 + \alpha^2} \quad x_{C_\alpha} = \frac{3 + \sqrt{4 - 5\alpha^2}}{1 + \alpha^2}.$$

- (b) Vérifier que le produit $\|\vec{AB_\alpha}\| \cdot \|\vec{AC_\alpha}\|$ est indépendant de α et est égal à $\|\vec{AI}\|^2 - R^2$.

1 (a) Un point $(x, y) \in \mathcal{C}$ ssi $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$. Donc l'ensemble $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $I(3, 1)$ et de rayon $R = 2$.

(b) Un point $M(x, y) \in \Delta_\alpha$ ssi $\vec{AM} = \lambda \vec{u}, \lambda \in \mathbb{R}$. Ce qui donne $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda\alpha \end{cases}$ Cependant une équation cartésienne est donnée par : $\alpha x - y + 1 = 0$.

(c) Nous avons $d(I, \Delta_\alpha) = \frac{|\alpha \cdot 3 - 1 + 1|}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = \frac{3\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}}$. La droite Δ_α coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts ssi $d(I, \Delta_\alpha) < R = 2$ ou encore $\frac{9\alpha^2}{1 + \alpha^2} < 4$. Ceci est vrai ssi $\alpha^2 < \frac{4}{5}$, ce qui donne le résultat.
 La droite Δ_α est tangente au cercle ssi $d(I, \Delta_\alpha) = 0$, c-à-d $\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2- (a) Un point (x, y) appartient à $\Delta_\alpha \cap \mathcal{C}$ ssi $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4 \\ y = 1 + \alpha x. \end{cases}$ En conséquence nous aurons $(1 + \alpha^2)x^2 - 6x + 5 = 0$. La résolution de cette équation de second degré donne le résultat souhaité.

(b) Un calcul simple donne

$$\|\vec{AB_\alpha}\|^2 = x_{B_\alpha}^2 (1 + \alpha^2) \quad \text{et} \quad \|\vec{AC_\alpha}\|^2 = x_{C_\alpha}^2 (1 + \alpha^2).$$

Ainsi nous obtenons

$$\|\vec{AB_\alpha}\|^2 \|\vec{AC_\alpha}\|^2 = (1 + \alpha^2) x_{B_\alpha} x_{C_\alpha} = 5 = 9 - 4 = \|\vec{AI}\|^2 - R^2.$$