UNE RÉGULARISATION SPECTRALE ÉlÉMENTAIRE

Michel WEBER

Université de Strasbourg

Soit $U: H \to H$ une contraction d'un espace de Hilbert $(H, ||\cdot||)$. Considérons les moyennes ergodiques

$$\forall n \geq 1, \qquad A_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j.$$

Dans un travail récent, nous avons montré comment étudier efficacement la structure de l'ensemble $A(f) = \{A_n(f), n \geq 1\}$, $f \in H$ à l'aide d'une méthode de régularisation spectrale, dont le principe est contenu dans une inégalité que nous rappelons. Soit $f \in H$, soit μ la mesure spectrale de f relativement à U. Nous régularisons cette mesure en une mesure $\hat\mu$ définie de la façon suivante:

$$\frac{d\hat\mu}{dx}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} Q(\theta, x)\mu(d\theta) = \int_{|\theta|<|x|} |x|^{-3}\theta^2\mu(d\theta) + \int_{|x|<|\theta|\leq\pi} |\theta|^{-1}\mu(d\theta), \quad 0 < |x| \leq \pi.$$

Alors

Théorème A. ([**LW**], théorème 1) *Pour tous entiers positifs $m \geq n$*

$$||A_n f - A_m f||^2_{2,\mu} \leq 4\pi\ \hat\mu(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}]. \tag{2}$$

Cette inégalité implique immédiatement que pour toute suite croissante (n_p) d'entiers positifs

$$\sum_{p=1}^{\infty} ||A_{n_{p+1}}(f) - A_{n_p}(f)||^2 \leq 6\pi ||f||^2. \tag{3}$$

De plus, si $N(A(f), \varepsilon)$ désigne le cardinal minimal d'un recouvrement de $A(f)$ par des boules hilbertiennes de rayon ε , alors

$$N(A(f), \varepsilon) \leq 6\pi ||f||^2 \varepsilon^{-2} + 1. \tag{4}$$

Nous proposons de donner une autre preuve à la fois très élémentaire et courte de l'inégalité de régularisation spectrale (2), avec toutefois une perte relative quant à la précision des constantes. Nous utiliserons un argument nouveau d'inversion dans le changement de variables. Posons pour tout réel $x \geq 1$, $V_x(\theta) = \frac{(e^{ix\theta}-1)}{x(e^{i\theta}-1)}$. Rappelons trois estimations élémentaires de ces noyaux. Pour tout réel $x \geq 1$, et tous entiers $m > n > 0$, $|V_x(\theta)| \leq \inf(1, \frac{2}{x|\theta|})$, $|V_n(\theta) - V_m(\theta)| \leq 2\left(\frac{m-n}{m}\right)$, et $\left|\frac{\partial}{\partial x} V_x(\theta)\right| \leq \pi^2|\theta|$, si $|x\theta| \leq 1$ et $|\theta| \leq \frac{\pi}{2}$. En vertu du lemme spectral ([**RW**], p.33), pour tous entiers $m > n > 0$

$$||A_n f - A_m f||^2 \leq \left(\int_{|\theta|\leq\frac{1}{m}} + \int_{\frac{1}{m}\leq|\theta|<\frac{1}{n}} + \int_{|\theta|>\frac{1}{n}}\right) |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 \mu(d\theta),$$

AMS Subject Classification 1985: Primary 60F99 , Secondary 28D99.

Keywords: ergodic averages, spectral regularization, entropy numbers, square functions.

Posons alors pour tous $0 \leq y \leq \pi$ et $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$$K(\theta, y) = 2\pi^2 \mathbf{1}\left(|\theta| < y\right)|\theta| y^{-2} + 16 \mathbf{1}\left(|\theta| \geq y\right)|\theta|^{-1} \qquad M^{(\mu)}(dy) = \int K(\theta, y)\mu(d\theta)dy.$$

Un calcul facile montre que

$$\int_0^\pi K(\theta, y)dy = 2\pi^2 \int_{|\theta|}^\pi \frac{|\theta|}{y^2} + \int_0^{|\theta|} \frac{dy}{|\theta|} \leq 4\pi^2.$$

Théorème. $\quad ||A_n f - A_m f||^2 \leq 4\mu\left\{\left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right[\right\} + M^{(\mu)}\left\{\left[\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right[\right\}.$

Démonstration. Il suffit d'estimer

$$(I) = \int_{|\theta| < \frac{1}{m}} |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 \mu(d\theta) \qquad (II) = \int_{|\theta| > \frac{1}{n}} |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 \mu(d\theta).$$

Concernant (I):

$$\begin{aligned}(I) &\leq 2\int_{|\theta|<\frac{1}{m}} \left|\int_n^M \frac{\partial}{\partial x} V_x(\theta)\ dx\right| \mu(d\theta) = 2\int_{|\theta|<\frac{1}{m}} \left|\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left[\frac{\partial}{\partial x} V_x(\theta)\right]_{x=\frac{1}{y}} \frac{dy}{y^2}\right| \mu(d\theta) \\ &\leq 2\pi^2 \int_{|\theta|<\frac{1}{m}} \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left|\left[\frac{\partial}{\partial x} V_x(\theta)\right]_{x=\frac{1}{y}}\right| \frac{dy}{y^2}\mu(d\theta) \leq 2\pi^2 \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left(\int_{|\theta|<y} \frac{|\theta|}{y^2}\mu(d\theta)\right) dy.\end{aligned}$$

Concernant (II):

$$\begin{aligned}(II) &\leq \int_{|\theta|>\frac{1}{n}} \left(|V_n(\theta)| + |V_m(\theta)|\right) . |V_n(\theta) - V_m(\theta)|\, \mu(d\theta) \\ &\leq 4\int_{|\theta|>\frac{1}{n}} \left(\frac{2}{n|\theta|} + \frac{2}{m|\theta|}\right) . \left(\frac{m-n}{m}\right) \mu(d\theta) \\ &\leq 16\int_{|\theta|>\frac{1}{n}} \frac{1}{|\theta|}\left(\frac{m-n}{mn}\right)\mu(d\theta) = 16\int_{|\theta|>\frac{1}{n}} \left(\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \frac{1}{|\theta|} dy\right)\mu(d\theta) \\ &= 16\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left(\int_{|\theta|>\frac{1}{n}} \frac{1}{|\theta|}\mu(d\theta)\right) dy \leq 16\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} \left(\int_{|\theta|>y} \frac{1}{|\theta|}\mu(d\theta)\right) dy.\end{aligned}$$

Nous avons donc montré $\int_{\left(|\theta|<\frac{1}{m}\right)\cup\left(|\theta|>\frac{1}{n}\right)} |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 \mu(d\theta) \leq M^{(\mu)}\left\{\frac{1}{m} \leq |\theta| < \frac{1}{n}\right\}$. Le théorème est donc établi. ■

Références:

[JOR] Jones R., Ostrovskii I., Rosenblatt J., 1996. Square functions in ergodic theory, *Ergodic theory and dynamical systems*, **16**, p.267-305.

[LW] Lifshits M., Weber M. *Régularisation spectrale en théorie ergodique et en probabilités*, Note aux *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **324** Sér. 1,1996, p.99-103.

[RW] Rosenblatt J., Wierdl M. , Pointwise ergodic theorems via harmonic analysis, *Ergodic Theory and its Connections with Harmonic Analysis*, London Math. Soc., 1994, **205**, p.3-151.

[W] Weber M. *Entropie métrique et accroissements des moyennes ergodiques*, 1996, à paraître dans Rendiconti **47**.

M. Weber: Mathématique, Université Louis-Pasteur, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France, e-mail weber@math.u-strasbg.fr