Approximation d'une diffusion induite sur une équation cinétique par un système dynamique

Françoise Pène
fpene@maths.univ-rennes1.fr

Cet article est l'aboutissement d'un travail effectué en DEA sous la direction de Jean-Pierre Conze, à l'Université de Rennes 1. Pour plus de lisibilité, certaines notations figurant dans l'introduction ne seront précisées qu'au paragraphe 2.1.

1 Introduction

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un **système dynamique mesuré**, i.e. un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ muni d'une transformation $T : \Omega \to \Omega$ préservant la mesure μ. Nous supposerons qu'il existe un mouvement brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Nous serons amenés à considérer le cas où le système est **ergodique**, i.e le cas où la tribu des invariants $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} : T^{-1}(A) = A\}$ ne comporte que des ensembles de mesure nulle ou 1. Soient d un entier naturel non nul et $a : (\Omega, \mathcal{F}) \to \left(\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d)\right)$ une application mesurable de carré intégrable; nous nous intéressons ici au comportement asymptotique des processus d-dimensionnels

$$X_\varepsilon(\omega) = \left(X_{\varepsilon,t,x}(\omega) = x - \varepsilon \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \right\rfloor} a(T^k(\omega)) \right)_{t \in \mathbf{R}^+,\ x \in \mathbf{R}^d} .$$

Pour toute application borélienne $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$, nous notons, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $(t, x, \omega) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \Omega$,

$$\psi_\varepsilon(t, x, \omega) = \varphi\left(X_{\varepsilon,t,x}(\omega)\right) \quad \text{et} \quad u_\varepsilon(t, x) = \mathbf{E}_\mu[\psi_\varepsilon(t, x, \cdot)].$$

En particulier, on s'intéressera au cas où Ω est le tore $\mathbf{T}^n$ $(n \geq 2)$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^n$. Le résultat suivant est établi au paragraphe 3.

Théorème A *Si T est un automorphisme ergodique du tore $\Omega = \mathbf{T}^n$ $(n \geq 2)$ et si a est dans $C^{d+2}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^d)$ et vérifie $\mathbf{E}_\mu[a] = 0$, alors il existe une matrice positive $D(a)$, limite de la suite de matrices $\left(\mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} a \circ T^k\right)^{\otimes 2}\right]\right)_{N \geq 1}$ telle que, pour toute fonction $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ continue bornée, on a*

1. *$u_\varepsilon(t, x) \longrightarrow_{\varepsilon \to 0} u(t, x)$, uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$,*

2. $\psi_\varepsilon(t,x,\omega) \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} u(t,x)$, *pour la topologie faible* sur* $L^\infty\left(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \Omega\right)$,

où u *est l'unique fonction de classe* $C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$, *solution de l'équation de la chaleur*

$$\frac{d}{dt}u = \frac{1}{2}D(a) : \nabla_x^2 u,$$

avec la condition initiale $u(0,\cdot) \equiv \varphi$; *i.e.* $u(t,x) = \mathbf{E}_\mu\left[\varphi\left(x - B_t\right)\right]$ *où* $B = (B_t)_t$ *est un mouvement brownien sur* $\mathbf{R}^d$, *centré, de variance* $D(a)$.

Le second résultat établi dans cet article (au paragraphe 4) est le suivant :

Théorème B *Si* T *est ergodique et si* a *est une fonction homologue dans* $L^2(\Omega)$ *à une fonction engendrant une suite de différences de martingales relativement à une filtration* $\{\mathcal{F}_n = T^{-n}\mathcal{F}_0\}_n$, *alors la limite suivante existe*

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} a \circ T^k\right)^{\otimes 2}\right] = D(a),$$

et, pour toute fonction $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ *continue bornée, on a*

1. $u_\varepsilon(t,x) \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} u(t,x)$, *uniformément sur tout compact de* $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$,
2. $\psi_\varepsilon(t,x,\omega) \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} u(t,x)$, *pour la topologie faible* sur* $L^\infty\left(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \Omega\right)$,

où u *est l'unique fonction de classe* $C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$, *solution de l'équation de la chaleur*

$$\frac{d}{dt}u = \frac{1}{2}D(a) : \nabla_x^2 u,$$

avec la condition initiale $u(0,\cdot) \equiv \varphi$; *i.e.* $u(t,x) = \mathbf{E}_\mu\left[\varphi\left(x - B_t\right)\right]$ *où* $B = (B_t)_t$ *est un mouvement brownien sur* $\mathbf{R}^d$, *centré, de variance* $D(a)$.

Le point de départ de cette étude est un article de Claude Bardos, François Golse et Jean-François Colonna [BGC96]. Nous avons travaillé sur une version provisoire [BGC], dans laquelle le théorème A est établi dans le cas où T est l'automorphisme du tore $\Omega = \mathbf{T}^n$ (avec $n = 2$) donné par $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et pour $d = 3$. Au paragraphe 2, nous établissons des critères de convergence pour un système dynamique général. Le problème est alors de vérifier les conditions sur les exemples, ce sera l'objet des deux paragraphes suivants. Nous traitons au paragraphe 3 le cas des automorphismes du tore. Nous y démontrons le théorème A. Il s'agit essentiellement d'une réécriture des preuves données dans [BGC], le passage de la dimension 2 à la dimension $n \geq 2$ ne présentant pas de grandes difficultés dans le cas hyperbolique; le cas non hyperbolique nécessite plus de précautions. Pour cet exemple, la vérification des critères établis au paragraphe 2 repose sur un résultat de décorrélation de polynômes trigonométriques et sur des arguments de densité. Puis, nous montrons au paragraphe 4 comment les méthodes de martingales permettent de vérifier les critères établis au paragraphe 2 (que nous affaiblissons en remplaçant un résultat de bornitude dans L^3 par un résultat d'équi-intégrabilité du carré). Nous démontrons ainsi le théorème B. Les résultats obtenus par Stéphane Le Borgne [Bor97] permettent alors d'étendre le théorème A à toute fonction a höldérienne d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$. D'autre part, les critères de compacité utilisés dans le paragraphe 2 nous permettent de voir que les convergences étudiées ici résultent du TCL et d'un résultat de bornitude en norme L^1 (ainsi que nous l'énonçons dans le théorème C à la fin du paragraphe 2). Cette constatation et un TCL établi par Léonov nous permettent d'énoncer un résultat général (Théorème D) dans le cas où T est un endomorphisme ergodique sur un groupe abélien compact $\Omega = G$ (μ étant la mesure de Haar sur G). Ce sera l'objet du paragraphe 5. Pour terminer l'article, nous discutons en annexe de propriétés de décorrélation pour les polynômes trigonométriques (dont le rôle est essentiel dans la démonstration proposée par C. Bardos, F. Golse et J-F. Colonna). Nous interprétons ces résultats en termes de bernoullicité et de mélange.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré quelconque. Les 2 remarques suivantes nous permettront de restreindre les classes de fonctions φ et a pour lesquelles nous vérifierons les conclusions des théorèmes A et B.

Remarque 1.0.1 *Si, pour toute fonction φ de classe $C_K^\infty(\mathbf{R}^d)$, on a les conclusions 1 et 2 du théorème A ou du théorème B, il en est de même de toute fonction de classe C_b^0. La conclusion 1 peut être vue comme une convergence en loi uniforme sur tout compact de la suite de processus $(X_\varepsilon)_\varepsilon$ vers le mouvement brownien généralisé centré, de variance $D(a)$. La propriété suivante de tension uniforme sur tout compact est alors également vérifiée :*

Pour tout $\alpha > 0$, tout $\tau > 0$ et tout compact X de $\mathbf{R}^d$, il existe une constante $L = L_{\alpha,\tau,X} > 0$ telle que

$$\sup_{0\leq\varepsilon<1} \sup_{t\leq\tau;\ x\in X} \mu\left(\{\|X_{\varepsilon,t,x}\| \geq L\}\right) \leq \alpha,$$

avec la convention $X_{0,t,x} = x - B_t$.

Preuve. Pour vérifier ceci, on montre tout d'abord la propriété de tension uniforme sur tout compact, en approchant $\mathbf{1}_{B(0,L)}$ par une suite croissante $(g_n)_n$ de fonctions plateaux de classe C_K^∞. Il s'agit ensuite d'utiliser cette propriété de tension pour étendre les conclusions 1 et 2 aux fonctions de classe C_b^0. Dans ce qui suit, φ désignera une fonction de classe C_b^0, non identiquement nulle. Soit $\alpha > 0$, $\tau > 0$ et X un compact de $\mathbf{R}^d$. D'après ce qui précède, il existe une constante $L > 0$ telle que l'on a $\sup_{0\leq\varepsilon<1}\sup_{t\leq\tau;x\in X}\mu\left(\{\|X_{\varepsilon,t,x}\| \geq L\}\right) \leq \frac{\alpha}{4\|\varphi\|_\infty}$. Il existe une fonction $\tilde{\varphi}^{(\alpha)} \in C_K^\infty$ telle que $\sup_{\|y\|\leq L}|\varphi(y) - \tilde{\varphi}^{(\alpha)}(y)| \leq \frac{\alpha}{2}$ et $\|\tilde{\varphi}^{(\alpha)}\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$. Il vient

$$\sup_{0\leq\varepsilon<1} \sup_{t\leq\tau;\ x\in X} \left|\mathbf{E}_\mu\left[\varphi(X_{\varepsilon,t,x}) - \tilde{\varphi}^{(\alpha)}(X_{\varepsilon,t,x})\right]\right| \leq \alpha.$$

Ainsi, pour tout $\alpha > 0$, on a $\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\leq\tau;\ x\in X}|\mathbf{E}_\mu[\varphi(X_{\varepsilon,t,x}) - \varphi(x - B_t)]| \leq 2\alpha$.

Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \Omega) \cap L^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \Omega)$. Montrons que $\lim_{\varepsilon\to 0} < \varphi(X_\varepsilon), f >=< \varphi(x - B_t), f >$. Soient $\alpha > 0$, il existe $\tau = \tau^{(\alpha,f)} > 0$ et un compact $X = X^{(\alpha,f)}$ de $\mathbf{R}^d$ tels que

$$\int_{([0,\tau]\times X\times\Omega)^c} |f(t,x,\omega)|\, dt\, dx\, d\mu(\omega) \leq \frac{\alpha}{6\|\varphi\|_\infty}.$$

Il existe un réel $L > 0$ tel que

$$\sup_{0\leq\varepsilon<1} \sup_{t\leq\tau,\ x\in X} \mu\left(\{\|X_{\varepsilon,t,x}\| > L\}\right) \leq \min\left(\frac{1}{\tau.\mathrm{mes}(X)}\left(\frac{\alpha}{6\|\varphi\|_\infty.\|f\|_{L^2}}\right)^2, \frac{\alpha}{6\|\varphi\|_\infty\|f\|_{L^1}}\right)$$

et il existe une fonction $\tilde{\varphi}^{(\alpha)} \in C_K^\infty$ telle que $\sup_{\|y\|\leq L} |\varphi(y) - \tilde{\varphi}^{(\alpha)}(y)| \leq \frac{\alpha}{3\|f\|_{L^1}}$ et $\|\tilde{\varphi}^{(\alpha)}\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty$. Notons $\tilde{\psi}_\varepsilon^{(\alpha)}(t,x,\omega) := \tilde{\varphi}^{(\alpha)}(X_{\varepsilon,t,x}(\omega))$. Nous avons alors

$$\sup_{0<\varepsilon<1} \left| < \psi_\varepsilon - \tilde{\psi}_\varepsilon^{(\alpha)}, f > \right| \leq \alpha \quad \text{et} \quad \left| < \mathbf{E}_\mu[\varphi(x - B_t)] - \mathbf{E}_\mu[\tilde{\varphi}^{(\alpha)}(x - B_t)], f > \right| \leq \alpha,$$

cqfd.

Remarque 1.0.2 *Si les conclusions du théorème A ou du théorème B sont vérifiées pour une fonction $a : \Omega \to \mathbf{R}^d$, alors elles seront encore vraies pour toute fonction b homologue à a dans L^2, i.e si b est de la forme $b = a + h - h \circ T$ avec h dans L^2.*

Preuve. Il est facile de voir que $\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} b \circ T^k \right)^{\otimes 2} \right] = D(a)$. Il reste à établir les conclusions 1 et 2, pour toute fonction φ continue bornée. D'après la remarque précédente, il suffit de les vérifier pour les fonctions de classe C_K^∞. Si φ est une telle fonction (supposons la non identiquement nulle), l'inégalité des accroissements finis nous donne alors

$$\|u_\varepsilon^{(b)} - u_\varepsilon^{(a)}\|_\infty \leq 2d\|\nabla\varphi\|_\infty \varepsilon \|h\|_{L^1},$$

et, pour toute fonction f dans $L^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \Omega) \cap L^2(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \Omega)$ et tous $\tau > 0$ et X compact de $\mathbf{R}^d$, on a

$$| < \psi_\varepsilon^{(a)} - \psi_\varepsilon^{(b)}, f > | \leq 2\|\varphi\|_\infty \int_{([0,\tau]\times X \times \Omega)^c} |f(t,x,\omega)|\, dt\, dx\, d\mu(\omega) +$$

$$+2d\|\nabla\varphi\|_\infty (\tau \operatorname{mes}(X))^{\frac{1}{2}} \varepsilon \|h\|_{L^2} \|f\|_{L^2},$$

cqfd.

2 Critères de convergence

Nous énonçons ici des résultats généraux reliant des propriétés de compacité aux résultats de convergence des théorèmes A et B. Nous établirons dans les paragraphes suivants les décorrélations permettant d'obtenir ces compacités. Voici tout d'abord quelques préliminaires.

2.1 Notations

Soient r et s deux entiers naturels non nuls. Si A et B sont deux vecteurs respectivement dans $\mathbf{R}^r$ et dans $\mathbf{R}^s$, on définit la matrice $A \otimes B := A^t B$ de taille $r \times s$ et on notera $A^{\otimes 2}$ la matrice symétrique $A \otimes A$. Soient M et N deux matrices de taille $r \times s$, on définit le réel $M : N = N : M = \sum_{i,j} M_{i,j} N_{i,j}$. Avec ces définitions, si X est une matrice de taille $r \times r$, si A et B sont dans $\mathbf{R}^r$, alors on a

$$X : A \otimes B = \sum_{i,j} X_{i,j} A_i B_j = {}^t(XB)A =< A, XB > .$$

On notera $|\cdot|_\infty$ la norme du supremum relativement à la base canonique de $\mathbf{R}^r$. Soit $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}^r, \mathcal{B}(\mathbf{R}^r))$ une application mesurable, nous définissons

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} := \inf\{M > 0 : \mu\{x : |f(x)|_\infty > M\} = 0\},$$

et, pour $1 \leq p < +\infty$,

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(\mu)} = |\mathbf{E}_\mu\left[|f|^p\right]|_\infty^{\frac{1}{p}},$$

avec $|f|^p : \Omega \to \mathbf{R}^r$ telle que $(|f|^p)_i = |f_i|^p$ en notant f_i les applications coordonnées de f. Soient A, a et b des applications mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$ à valeurs dans $\mathrm{Mat}_{r,r}(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{r\times r}$, $\mathbf{R}^r$ et $\mathbf{R}^r$ respectivement, l'inégalité de Hölder s'écrit, pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\mathbf{E}_\mu[| < a, b > |] \leq r\|a\|_p\|b\|_q \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_\mu[| < Aa, b > |] \leq r^2\|A\|_\infty\|a\|_p\|b\|_q,$$

et l'inégalité de Bienaymé-Tchebytcheff nous donne

$$\mu\left(\{|a|_\infty \geq \varepsilon\}\right) \leq r\frac{\|a\|_2^2}{\varepsilon^2}.$$

Nous aurons besoin de la quantité suivante

$$N_{\varepsilon,\alpha,\beta} = \#\left(\mathbf{Z} \cap \left]\frac{\alpha}{\varepsilon^2};\frac{\beta}{\varepsilon^2}\right]\right) = \left\lfloor\frac{\beta}{\varepsilon^2}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{\alpha}{\varepsilon^2}\right\rfloor.$$

Soient $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^p$, n un entier naturel non nul et $k = (k_1, \ldots, k_d)$ un vecteur à coefficients entiers naturels, nous notons (quand ces quantités sont bien définies) $\nabla^n f$ la différentielle d'ordre n de f et

$$D^k f = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_d^{k_d}} f, \quad \text{avec} \quad |k| = k_1 + \ldots + k_d.$$

Pour tout x dans $\mathbf{R}^d$, nous désignons par $|\nabla^n\varphi(x)|_\infty$ la norme du supremum de $\nabla^n\varphi(x)$ considéré comme élément de $\mathbf{R}^{p.d^n}$:

$$|\nabla^n\varphi(x)|_\infty = \sup_{1\leq i\leq p;\ 1\leq\alpha_1,\ldots,\alpha_n\leq d}\left|\frac{\partial^n f_i}{\partial x_{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_{\alpha_n}}(x)\right|.$$

$C_b^3(\mathbf{R}^d)$ est un espace vectoriel normé pour la norme

$$\|f\|_{C_b^3(\mathbf{R}^d)} = \sum_{|k|\leq 3}\|D^k f\|_\infty.$$

De même, si $\tau > 0$ et si X est un compact de $\mathbf{R}^d$, $C_b^{0,2}([0,\tau]\times X)$ est un espace vectoriel normé pour la norme

$$\|f\|_{C_b^{0,2}([0,\tau]\times X)} = \sum_{|k|\leq 2}\|D^{0,k}f\|_\infty.$$

Soient m et p deux entiers naturels non nuls. On note, pour $H^m = H^m(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^r)$ ou $H^m = H^m(\mathbf{T}^p, \mathbf{R}^r)$,

$$\|f\|_{H^m} := \left(\sum_{|k|\leq m}\|D^k f\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.2 Critères

Soit $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une application borélienne.

2.2.1 Un résultat de relative compacité uniforme

Proposition 2.2.1 *Si φ est une fonction de classe $C_b^3(\mathbf{R}^d)$ et si $a : \Omega \to \mathbf{R}^d$ est intégrable centrée et telle que*

$$\sup_N \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N} a \circ T^k \right\|_{L^1(\mu)} < +\infty,$$

alors la famille $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est relativement compacte dans $C_b^{0,2}([0;\tau] \times X)$ pour tout $\tau > 0$ et tout compact X de $\mathbf{R}^d$. De plus, ses valeurs d'adhérence $\tilde{u}$ vérifient $\tilde{u}(0,\cdot) \equiv \varphi$.

Pour démontrer la proposition 2.2.1, nous avons besoin des deux résultats suivants de majoration uniforme en ε.

Lemme 2.2.2 *Sous les hypothèses de la proposition 2.2.1, $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est uniformément bornée dans $C_b^{0,3}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ par une constante $C > 0$.*

Preuve. On a, pour tout $k \in \mathbf{N}^d$ tel que $|k| \leq 3$, $\sup_{t\in\mathbf{R}^+} \sup_{x\in\mathbf{R}^d} |D_x^k u_\varepsilon(t,x)| \leq \|D^k\varphi\|_\infty$, *cqfd.*

Lemme 2.2.3 *Sous les hypothèses de la proposition 2.2.1, il existe une constante $C' > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $t \in \mathbf{R}^+$, tout $\tau \in \mathbf{R}$ avec $t + \tau \geq 0$ et tout x dans $\mathbf{R}^d$ et pour tout $k = 0, 1, 2$, on a*

$$|\nabla_x^k u_\varepsilon(t+\tau,x) - \nabla_x^k u_\varepsilon(t,x)|_\infty \leq C'\sqrt{|\tau|}.$$

Preuve. Soient $\tau > 0$ et $k = 0, 1, 2$. Nous avons, par le théorème de convergence dominée,

$$\begin{aligned}
|\nabla_x^k u_\varepsilon(t+\tau,x) - \nabla_x^k u_\varepsilon(t,x)|_\infty &\leq d\left\|\nabla^{k+1}\varphi\right\|_\infty \left\| \varepsilon \sum_{k=\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a \circ T^k \right\|_{L^1(\mu)} \\
&\leq d\|\nabla^{k+1}\varphi\|_\infty \sqrt{\tau} \sup_N \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N} a \circ T^k \right\|_{L^1(\mu)} \\
&\leq C'\sqrt{\tau},
\end{aligned}$$

par hypothèse. De même, on a $|\nabla_x^k u_\varepsilon(t-\tau,x) - \nabla_x^k u_\varepsilon(t,x)|_\infty \leq C'\sqrt{\tau}$, *cqfd.*

La proposition 2.2.1 résulte de ces deux lemmes et du théorème d'Ascoli.

2.2.2 Convergence faible*

Proposition 2.2.4 *Sous les hypothèses de la proposition 1 et si, de plus, on a*

$$(C_1) \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}_\mu \left[\nabla\varphi \left(x - \varepsilon \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^k \right) . \varepsilon \sum_{l=\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^l \right] = 0,$$

$$(C_2) \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}_\mu \left[\nabla^2\varphi \left(x - \varepsilon \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^k \right) : \left(\varepsilon \sum_{l=\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^l \right)^{\otimes 2} \right]$$

$$-\mathbf{E}_\mu \left[\nabla^2\varphi \left(x - \varepsilon \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^k \right) \right] : \mathbf{E}_\mu \left[\left(\varepsilon \sum_{l=\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^l \right)^{\otimes 2} \right] = 0,$$

$$(C_3) \quad \limsup_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in\mathbf{R}^+} \left\| \varepsilon \sum_{l=\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^l \right\|_3^3 = O(\tau)^{\frac{3}{2}},$$

et si la limite suivante existe

$$(C_4) \quad \lim_{n\to+\infty} G(n) = D(a),$$

avec

$$G(n) = \mathbf{E}_\mu \left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} a \circ T^k \right)^{\otimes 2} \right],$$

alors $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge ∗faiblement dans $L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ et uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ vers u l'unique solution de classe $C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{d}{dt} u = \frac{1}{2} D(a) : \nabla_x^2 u,$$

avec condition initiale $u(0,\cdot) \equiv \varphi$; i.e $u(t,x) = \mathbf{E}_\mu[\varphi(x - B_t)]$, où $B = (B_t)_{t\geq 0}$ désigne un MB centré de matrice de variance $D(a)$.

Preuve. $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est une famille bornée dans $L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ (par $\|\varphi\|_\infty$). Donc, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, cette famille possède au moins une valeur d'adhérence pour la convergence faible∗ dans $L^\infty\left(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d\right) = \left(L^1(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)\right)'$. Soit $u \in L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ l'une d'entre elles. Alors, quitte à prendre une sous-suite, on a, pour toute fonction f intégrable sur $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} u_\varepsilon(t,x) f(t,x)\,dtdx = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} u(t,x) f(t,x)\,dtdx.$$

En particulier, ceci est vrai pour toute fonction f dans $\mathcal{C}_K^\infty$. Nous allons regarder u au sens des distributions. Pour toute fonction f dans $\mathcal{C}_K^\infty$, on définit, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\tau > 0$,

$$F_{\varepsilon,\tau}(f) := \left\langle \frac{u_\varepsilon(\cdot+\tau,\cdot) - u_\varepsilon(\cdot,\cdot)}{\tau}, f \right\rangle.$$

On a

$$F_{\varepsilon,\tau}(f) = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} \frac{u_\varepsilon(t+\tau,x)-u_\varepsilon(t,x)}{\tau} f(t,x)\,dtdx$$
$$= \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} u_\varepsilon(t,x)\frac{f(t-\tau,x)-f(t,x)}{\tau}\,dtdx.$$

Donc, pour tout $\tau > 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0} F_{\varepsilon,\tau}$ existe et vaut

$$F_\tau(f) = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} u(t,x)\frac{f(t-\tau,x)-f(t,x)}{\tau}\,dtdx$$

car $\frac{f(\cdot-\tau,\cdot)-f(\cdot,\cdot)}{\tau} \in \mathcal{C}_K^\infty\left(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\right)$. En faisant tendre τ vers 0, nous obtenons

$$\begin{aligned} F(f) &:= \lim_{\tau\to 0} F_\tau(f) \\ &= -\int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} u(t,x)\frac{d}{dt}f(t,x)\,dtdx \\ &= \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} \frac{d}{dt}u(t,x)f(t,x)\,dtdx. \end{aligned}$$

Comme φ est dans C_b^3, nous pouvons écrire la formule de Taylor avec reste de Lagrange à l'ordre 2, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{u_\varepsilon(t+\tau,x)-u_\varepsilon(t,x)}{\tau} = &-\underbrace{\mathbf{E}_\mu\left[\nabla\varphi\left(x-\varepsilon\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor} a\circ T^k\right)\cdot\frac{\varepsilon}{\tau}\sum_{k=\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\rfloor} a\circ T^k\right]}_{\bar{A}_{\varepsilon,\tau,t,x}} + \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{E}_\mu\left[\nabla^2\varphi\left(x-\varepsilon\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor} a\circ T^k\right):\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}}\sum_{k=\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\rfloor} a\circ T^k\right)^{\otimes 2}\right]}_{\bar{B}_{\varepsilon,\tau,t,x}} + \\ &+ \bar{C}_{\varepsilon,\tau,t,x}, \end{aligned}$$

avec $|\bar{C}_{\varepsilon,\tau,t,x}| \leq \frac{d^3}{6\tau}\|\nabla^3\varphi\|_\infty \left\|\varepsilon\sum_{k=\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\rfloor} a\circ T^k\right\|_3^3$. Or, par hypothèse, on a

$$(C_1)\quad \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{A}_{\varepsilon,\tau,t,x} = 0,$$

$$(C_2)\quad \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{B}_{\varepsilon,\tau,t,x} - \frac{1}{2}\mathbf{E}_\mu\left[\nabla^2\varphi\left(x-\varepsilon\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor} a\circ T^k\right)\right]:\mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}}\sum_{k=\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\rfloor} a\circ T^k\right)^{\otimes 2}\right] = 0,$$

et la condition (C_3) implique

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} |\bar{C}_{\varepsilon,\tau,t,x}| = O(\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

Par le théorème de convergence dominée, on montre que u_ε est deux fois dérivable en x et que $\nabla_x^2 u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}_\mu[\nabla_x^2 \psi_\varepsilon(t,x,\cdot)]$, car $\nabla^2\varphi$ est bornée. Donc, pour toute fonction f dans $\mathcal{C}_K^\infty$, on a

$$F_{\varepsilon,\tau}(f) = \frac{1}{2}\left\langle \nabla_x^2 u_\varepsilon : \mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}}\sum_{k=0}^{N_{\varepsilon,t,t+\tau}-1} a\circ T^k\right)^{\otimes 2}\right] + \bar{C}_{\varepsilon,\tau,\cdot,\cdot} + \frac{v_\varepsilon}{\tau}, f\right\rangle,$$

avec $\lim_{\varepsilon\to 0} v_\varepsilon = 0$ et $\|\sup_{\varepsilon>0} v_\varepsilon\|_\infty < +\infty$. Or $\frac{\tau}{\varepsilon^2} - 1 \leq N_{\varepsilon,t,t+\tau} \leq \frac{\tau}{\varepsilon^2} + 1$, donc

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\left| F_{\varepsilon,\tau}(f) - \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d}\left(\nabla_x^2 u_\varepsilon(t,x) : \frac{1}{2}G(N_{\varepsilon,t,t+\tau})\right) f(t,x)\,dtdx\right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d}\left|\bar{C}_{\varepsilon,\tau,t,x} f(t,x)\right|\,dtdx \\
&\leq \limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d}|\bar{C}_{\varepsilon,\tau,t,x}|.\|f\|_{L^1(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)} \\
&\leq O(\tau)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, on a

$$(C_4) \qquad \lim_{n\to+\infty} G(n) = D(a).$$

Comme la fonction f est dans $\mathcal{C}_K^\infty$ et comme $N_{\varepsilon,t,t+\tau} \geq \frac{\tau}{\varepsilon^2} - 1$, il vient

$$F_\tau(f) = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d}\left(\nabla_x^2 u(t,x) : \frac{1}{2}D(a)\right) f(t,x)\,dtdx + O\left(\tau^{\frac{1}{2}}\right).$$

Puis, en faisant tendre τ vers 0, on fait disparaître le terme en $O\left(\tau^{\frac{1}{2}}\right)$, ce qui nous donne

$$\frac{d}{dt}u - \nabla_x^2 u : \frac{1}{2}D(a) = 0.$$

Nous obtenons ainsi l'équation de la chaleur

$$\frac{d}{dt}u = \frac{1}{2}D(a) : \nabla_x^2 u.$$

On vérifie facilement que les valeurs d'adhérence pour la topologie faible$*$ coïncident avec celles obtenues dans le paragraphe 2.2.1 (que l'on identifie à des distributions sur C_K^∞). Il reste à voir que ces valeurs d'adhérence correspondent à des fonctions de classe $C^{1,2}$ sur $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d$. Pour cela, on considère une valeur d'adhérence u de $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ pour $C^{0,2}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$ et pour la topologie faible$*$ sur L^∞. On a, au sens des distributions,

$$\frac{d}{dt}u = \frac{1}{2}D(a) : \nabla_x^2 u.$$

On en déduit que la distribution $\frac{d}{dt}u$ correspond à une fonction w continue en (t,x) . Soit v la fonction définie par

$$v(t,x) = \varphi(x) + \int_0^t w(s,x)ds.$$

v est de classe $C^{1,0}$. Vérifions que $z := u - v$ est la fonction identiquement nulle. Il est facile de voir que, pour tout x dans $\mathbf{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^+} z(t,x)g(t)\,dt = 0,$$

pour tout g dans $G := \{h';\ h \in C_K^\infty(\mathbf{R}^+)\}$ et que $G = \{g \in C_K^\infty(\mathbf{R}^+) : \int_{\mathbf{R}} g(t)\,dt = 0\}$. Soit une fonction φ_0 dans $C_K^\infty(\mathbf{R}^+)$ telle que $\int_{\mathbf{R}} \varphi_0(t)\,dt = 1$. Alors, pour toute fonction f dans $C_K^\infty(\mathbf{R}^+)$, la fonction $f - \bar{f}\varphi_0$ est dans G (en notant $\bar{f} := \int_{\mathbf{R}^+} f(s)\,ds$) et donc, pour tout x dans $\mathbf{R}^d$, on a

$$\int_{\mathbf{R}^+} z(t,x)f(t)\,dt = C(x)\int_{\mathbf{R}^+} f(s)\,ds,$$

avec $C(x) = \int_{\mathbf{R}^+} z(t,x)\varphi_0(t)\,dt$. On conclut, en utilisant la continuité de z, que $z(t,x) = C(x) = z(0,x) = 0$. Ainsi, u coïncide avec v. Donc les valeurs d'adhérence pour la convergence uniforme sur tout compact $[0;\tau]\times X$ et pour la convergence faible$*$ sur $L^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$ sont des solutions u de classe $C^{1,2}$ de l'équation de la chaleur donnée précédemment, vérifiant la condition initiale $u(0,\cdot)\equiv\varphi$. L'existence et l'unicité d'une telle fonction est un résultat classique (l'unicité repose sur un principe du maximum), *cqfd.*

2.2.3 Un second résultat de convergence faible$*$

Proposition 2.2.5 *Sous les hypothèses des propositions 2.2.1 et 2.2.4 et si, de plus, T est ergodique, alors $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers u pour la topologie faible$*$ sur* $L^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega) = \Big(L^1(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega)\Big)'$.

Preuve. $\{\psi_\varepsilon\}_\varepsilon$ est une famille uniformément bornée par $\|\varphi\|_\infty$. Donc, d'après le théorème de Banach-Alaoglu, $\{\psi_\varepsilon\}_\varepsilon$ est relativement $*$faiblement compacte. Soit ψ une valeur d'adhérence pour la topologie faible$*$, i.e ψ est la limite faible$*$ de $(\psi_\varepsilon)_\varepsilon$ (quitte à prendre une sous-suite). Montrons que $\psi\circ\tilde{T} = \psi$ presque partout (en notant $\tilde{T} = (\cdot,\cdot,T(\cdot))$), pour cela, il suffit de vérifier que l'on a $<\psi\circ\tilde{T}, f> = <\psi, f>$ pour toute fonction $f \in L^1(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega)\cap L^2(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega)$. Soit f une telle fonction. On remarque que l'on a

$$<\psi\circ\tilde{T}, f> = <\psi, Pf> = \lim_{\varepsilon\to 0} <\psi_\varepsilon, Pf> = \lim_{\varepsilon\to 0} <\psi_\varepsilon\circ\tilde{T}, f>,$$

où $P : L^1 \to L^1$ désigne l'opérateur défini par

$$P(f) = \frac{d\tilde{T}_{\mu_f}}{d\lambda},\ \text{avec}\quad d\lambda = dt\,dx\,d\mu,\ \ d\mu_f = f\,d\lambda\ \ \text{et}\ \ \tilde{T}\mu_f(A) = \mu_f(\tilde{T}^{-1}A);$$

$\tilde{T}\mu_f$ ainsi définie est absolument continue devant λ; en effet, si $\lambda(A) = 0$, alors $\mathbf{1}_A\circ\tilde{T} = 0$ λ-p.p (car λ est $\tilde{T}$-invariante), d'où

$$\tilde{T}\mu_f(A) = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega} \mathbf{1}_A\circ\tilde{T}\,d\mu_f = \int_{\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega} \mathbf{1}_A\circ\tilde{T}f\,d\lambda = 0.$$

P ainsi défini est appelé opérateur de Perron-Frobenius (ou opérateur de transfert) associé à $U_T : f \mapsto f\circ\tilde{T}$. D'autre part, on a

$$|<\psi_\varepsilon\circ\tilde{T} - \psi_\varepsilon, f>| \le 2\|\varphi\|_\infty \int_{([0,\tau]\times X\times\Omega)^c} |f(t,x,\omega)|\,dt\,dx\,d\mu(\omega) +$$

$$+d\|\nabla\varphi\|_\infty 2\varepsilon\|a\|_{L^2}(\tau.\mathrm{mes}(X))^{\frac{1}{2}}\|f\|_{L^2}.$$

Ainsi, pour presque tout $(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d$, $\psi(t,x,\cdot)$ est presque sûrement T-invariante, donc presque sûrement constante en $\omega\in\Omega$ (car T est ergodique), *cqfd.*

2.2.4 Conclusion

Proposition 2.2.6 *Si les hypothèses des trois propositions précédentes sont vérifiées, alors*

1. $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}_\mu[\psi_\varepsilon]=u$, *uniformément sur tout compact de* $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d$,
2. $\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon=u$, *au sens de la topologie faible* $*$ *sur* $L^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega)$,

où u est l'unique solution de classe $C^{1,2}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{d}{dt}u=\frac{1}{2}D(a):\nabla_x^2 u,$$

avec condition initiale $u(0,\cdot)\equiv\varphi$.

Preuve. Ceci résulte des propositions 2.2.1, 2.2.4 et 2.2.5, *cqfd.*

Remarque 2.2.7 *D'après la remarque 1.0.1 , si les fonctions $\varphi\in C_K^\infty$ satisfont les hypothèses des propositions 2.2.1, 2.2.4 et 2.2.5; alors les conclusions 1 et 2 seront encore vérifiées pour toute fonction φ continue bornée.*

Le résultat suivant découle des résultats de compacité établis précédemment.

Théorème C *Soit $\varphi:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ une fonction continue bornée. Si la suite de v.a. $\left(a\circ T^k\right)_k$ vérifie le TCL: $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}a\circ T^k\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}(0,D(a))$ et si $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}a\circ T^k\right)_N$ est bornée dans L^1, alors on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}_\mu[\varphi(X_{\varepsilon,t,x})]=\mathbf{E}[\varphi(x-B_t)],$$

uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d$ et $*$faiblement dans $L^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$; où $B=(B_t)_t$ désigne un mouvement brownien centré de matrice de variance $D(a)$.

Si, de plus, T est ergodique, alors on a également

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(X_{\varepsilon,t,x})=\mathbf{E}[\varphi(x-B_t)],$$

au sens de la topologie faible$*$ sur $L^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega)$.

Preuve. On sait déjà que $X_{\varepsilon,t,x}\xrightarrow{\mathcal{L}}x-B_t$. On a donc, pour tout $(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}_\mu[\varphi(X_{\varepsilon,t,x})]=\mathbf{E}[\varphi(x-B_t)].$$

La proposition 2.2.1 nous assure l'existence de valeurs d'adhérence de $\mathbf{E}_\mu[\varphi(X_{\varepsilon,\cdot,\cdot})]$ pour $C^{0,2}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$. D'après ce qui précède, la seule valeur d'adhérence est $(t,x)\mapsto\mathbf{E}[\varphi(x-B_t)]$. De la même manière que nous l'avons établi au cours de la démonstration de la proposition 2.2.4, on montre que cette valeur d'adhérence coïncide avec les valeurs d'adhérence de $\mathbf{E}_\mu[\varphi(X_{\varepsilon,\cdot,\cdot})]$ pour la topologie faible$*$ $L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ (dont l'existence est assurée par le théorème de Banach-Alaoglu).

Supposons T ergodique. On conclut en reprenant la démonstration de la proposition 2.2.5, *cqfd.*

Corollaire 2.2.8 *Si $(a \circ T^k)_k$ est une suite de v.a.i.i.d centrées de carré intégrable, alors*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}_\mu[\varphi(X_{\varepsilon,t,x})] = \mathbf{E}[\varphi(x - B_t)],$$

uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$ et $*$faiblement dans $L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$.

2.2.5 Affaiblissement des conditions (C_i)

Supposons que la fonction φ soit de classe C_b^3. On vérifie facilement les résultats suivants.

Proposition 2.2.9 *Si* $\sup_N \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a \circ T^k \right\|_{L^1(\mu)} < +\infty$ *et s'il existe une fonction positive δ telle que* $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0$ *et*

$$(C_1') \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}_\mu \left[\nabla_x \varphi \left(x - \varepsilon \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^k \right) . \left(\varepsilon \sum_{l=\lfloor \frac{t+\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^l \right) \right] = 0,$$

alors (C_1) est vérifiée.

Proposition 2.2.10 *Si* $\sup_N \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a \circ T^k \right\|_{L^2(\mu)} < +\infty$ *et s'il existe une fonction positive δ telle que* $\lim_{\varepsilon \to 0} \delta(\varepsilon) = 0$ *et*

$$(C_2') \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}_\mu \left(\nabla_x^2 \varphi \left(x - \varepsilon \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^k \right) : \left(\varepsilon \sum_{l=\lfloor \frac{t+\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^l \right)^{\otimes 2} \right)$$

$$-\mathbf{E}_\mu \left[\nabla_x^2 \varphi \left(x - \varepsilon \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^k \right) \right] : \mathbf{E}_\mu \left[\left(\varepsilon \sum_{l=\lfloor \frac{t+\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \rfloor + 1}^{\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \rfloor} a \circ T^l \right)^{\otimes 2} \right] = 0,$$

alors (C_2) est vérifiée.

Remarque 2.2.11 *Les propriétés (C_1) et (C_1') ((C_2) et (C_2'), respectivement) sont des propriétés de décorrélation asymptotique, mais (C_1') ((C_2') resp.) introduit un écart de l'ordre de $f(\varepsilon) = \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^2}$ entre les indices sur lesquels portent chacune des deux sommes. Dans le cas des automophismes du tore, nous aurons*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(\varepsilon) = +\infty,$$

i.e. l'écart entre les indices devient de plus en plus grand.

Observons que la condition (C_3) est satisfaite si $\sup_{N\geq 1} \| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N} a \circ T^k \|_{L^3(\mu)} < +\infty$. En conclusion, on a l'énoncé suivant :

Théorème 2.2.12 *Si a vérifie (C_4) et $\sup_{N\geq 1} \| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N} a \circ T^k \|_{L^3(\mu)} < +\infty$, si $\varphi \in C_b^3(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ et si les conditions (C_1') et (C_2') sont satisfaites, alors*

1. $\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}_\mu[\psi_\varepsilon] = u$, *uniformément sur tout compact de* $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$,
2. $\lim_{\varepsilon \to 0} \psi_\varepsilon = u$, *au sens de la topologie faible$*$ sur* $L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \Omega)$, *si T est ergodique*

où u est l'unique solution de classe $C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{d}{dt} u = \frac{1}{2} D(a) : \nabla_x^2 u,$$

avec condition initiale $u(0, \cdot) \equiv \varphi$.

3 Automorphismes du tore : méthode des polynômes trigonométriques

3.1 Préliminaires

Nous considérons maintenant le cas particulier des automorphismes du tore. L'objet de ce paragraphe est de généraliser à tout automorphisme ergodique T du tore, en dimension quelconque, la méthode utilisée dans l'article de C. Bardos, F. Golse et J-F. Colonna [BGC] pour $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit un entier naturel $n \geq 2$. Dans cette partie, Ω est le tore $\mathbf{T}^n$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}^n$. Nous reprenons ici les arguments utilisés dans l'article [BGC] pour vérifier (C_1'), (C_2') et (C_4). Introduisons tout d'abord quelques notations.

Soit T un **automorphisme du tore** $\mathbf{T}^n$, c'est-à-dire que T correspond à une application linéaire sur $\mathbf{R}^n$, également notée T, dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbf{R}^n$ est à coefficients entiers et de déterminant ± 1. La mesure μ est invariante par T.

Nous notons S l'application linéaire transposée de T, F_s, F_u et F_e les sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ stables par S associés aux valeurs propres de S de module respectivement strictement inférieur, strictement supérieur et égal à 1. Nous notons m_s, m_u et m_e la dimension de F_s, F_u et F_e, respectivement; ρ et ρ_s le rayon spectral de S, $S_{|F_s}$, respectivement. Pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, nous noterons x_s, x_u et x_e les éléments de F_s, F_u et F_e, respectivement, tels que $x = x_s + x_u + x_e$.

Nous considérons une base $(v_i)_{i=1,\ldots,n}$ de $\mathbf{R}^n$ dans laquelle S est représentée par une matrice de Jordan réelle. Dans tout ce qui suit, $\|\cdot\|$ correspondra à la norme du supremum relativement à cette base et $d(\cdot,\cdot)$ sera la distance associée à cette norme.

Rappelons que la transformation T est **ergodique** si et seulement si M ne possède pas de valeurs propres racines de l'unité. Nous dirons que T (ou M) est **hyperbolique** si M ne possède pas de valeurs propres de module 1, c'est-à-dire si $F_e = \{0\}$. L'hyperbolicité entraîne donc l'ergodicité, mais la réciproque est fausse, la matrice suivante nous donne un exemple d'automorphisme ergodique non hyperbolique du tore $\mathbf{T}^4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les automorphismes du tore ergodiques non hyperboliques sont dits **quasi-hyperboliques**.

Nous donnons tout d'abord le résultat suivant (cf. Léonov [Léo64] et Katznelson [Kat71]). Ce résultat nous permettra de généraliser la méthode présentée dans l'article [BGC] à tout automorphisme ergodique du tore en dimension $n \geq 2$.

Théorème 3.1.1 *Soient V et W deux sous-espaces de $\mathbf{R}^n$ stables par S tels que $\mathbf{R}^n = V \oplus W$ et tels que les valeurs propres de $S_{|V}$ soient distinctes de celles de $S_{|W}$. Si $V \cap \mathbf{Z}^n = \{0\}$, alors il existe un $K > 0$ tel que, pour tout k dans $\mathbf{Z}^n$ non nul, on a*

$$d(k, V) \geq K\|k\|^{-q},$$

où q désigne la dimension de V.

Théorème 3.1.2 *Si T est un automorphisme du tore $\mathbf{T}^n$, alors il existe des constantes $K_{(s)} > 0$ et $K_{(u)} > 0$ telles que, pour tout α dans $\mathbf{Z}^n$ non nul, on a*

$$\|\alpha_u + \alpha_e\| \geq d(\alpha, F_s) \geq \frac{K_{(s)}}{\|\alpha\|^{m_s}} \quad et \quad \|\alpha_s + \alpha_e\| \geq d(\alpha, F_u) \geq \frac{K_{(u)}}{\|\alpha\|^{m_u}}.$$

Si, de plus, T est ergodique, alors

$$\mathbf{Z}^n \cap (F_e \oplus F_u) = \{0\} \ et \ \ \mathbf{Z}^n \cap (F_e \oplus F_s) = \{0\},$$

et il existe donc des constantes $K_{(e,u)} > 0$ et $K_{(e,s)} > 0$ telles que, pour tout α dans $\mathbf{Z}^n$ non nul, on a

$$\|\alpha_s\| \geq d(\alpha, F_e \oplus F_u) \geq \frac{K_{(e,u)}}{\|\alpha\|^{m_e+m_u}} \quad et \quad \|\alpha_u\| \geq d(\alpha, F_e \oplus F_s) \geq \frac{K_{(e,s)}}{\|\alpha\|^{m_e+m_s}}.$$

La deuxième partie de ce théorème est une conséquence du résultat précédent et des deux propositions suivantes.

Proposition 3.1.3 *Si M est une matrice à coefficients entiers dont toutes les valeurs propres sont de module 1, alors elles sont toutes racines de l'unité.*

En particulier, si T est ergodique, alors $F_e \neq \mathbf{R}^n$.

Proposition 3.1.4 *Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$ engendré par des vecteurs à coefficients entiers, alors il existe une matrice de changement de base P à coefficients entiers et de déterminant 1 dont les $r = dim(W)$ premiers vecteurs colonnes forment une base de W.*

Preuve du théorème 3.1.2 Supposons qu'il existe un vecteur entier non nul α dans $F_e \oplus F_u$. Considérons le sous-espace vectoriel W de $\mathbf{R}^n$ engendré par $\{S^k\alpha;\ k \in \mathbf{N}\}$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, W est le sous-espace vectoriel engendré par $\{S^k\alpha;\ k = 0, ..., n-1\}$ et est stable par S et S^{-1}. Soit P comme dans la proposition 3.1.4 pour ce W; P correspond à une base $(u_i)_{i=1,...,n}$. Soit $L := P^{-1t}MP$ la matrice de S dans cette base. L est à coefficients entiers, est de la forme

$$\begin{pmatrix} \overbrace{A}^{dim(W)=r} & \overbrace{B}^{n-r} \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

et on a $det(L) = \pm 1$. La matrice A est la matrice de $S_{|W}$ dans la base $(u_i)_{i=1,...,r}$, on a $det(A) = \pm 1$. Comme $W \subseteq F_e \oplus F_u$, on a nécessairement $W \cap F_u = \{0\}$ (car $W \cap F_s = \{0\}$ et $det(A) = \pm 1$). Donc W est inclus dans F_e. D'après la proposition 3.1.3, les valeurs propres de $S_{|W}$ sont racines de l'unité, ce qui contredit la condition d'ergodicité de T. On montre de même que $\mathbf{Z}^n \cap (F_e \oplus F_s) = 0$, *cqfd.*

Remarque 3.1.5 *Si T est un automorphisme du tore, alors on a*

$$m_s + m_e > 0 \quad et \quad m_u + m_e > 0.$$

Si, de plus, T est ergodique, alors $m_s > 0$ et $m_u > 0$.

3.2 Comportement asymptotique

Soit χ une fonction positive définie sur $\mathbf{R}^+$. On définit

$$H_\chi = \left\{ f \in L^2(\mathbf{T}^n; \mathbf{R}^r) \ : \ \sum_{\|k\| \geq R} |c_k(f)|_\infty^2 \leq (\chi(R))^2 \|f\|_{L^2(\mu)}^2,\ \forall R > 0 \right\}.$$

Dans le théorème suivant, le symbole "." désignera la multiplication composante par composante.

Théorème 3.2.1 (Décorrélation et Mélange exponentiel) *Si T est un automorphisme ergodique du tore $\mathbf{T}^n$, alors*

1. *Si χ est une fonction positive et décroissante définie sur $\mathbf{R}^+$ convergeant vers 0 à l'infini et si ρ_0 vérifie $\rho_s < \rho_0 < 1$, alors il existe des constantes $A > 0$, $C_0 > 0$ telles que, pour toutes fonctions f et g dans H_χ avec $\mathbf{E}_\mu[f] = \mathbf{E}_\mu[g] = 0$, et pour tout entier naturel m, on a*
$$|\mathbf{E}_\mu[f \circ T^m.g]|_\infty \leq A\|f\|_{L^2(\mu)}\|g\|_{L^2(\mu)}\chi\left(C_0\rho_0^{-\frac{m}{2}}\right).$$

2. *En particulier, pour tout entier $s \geq 1$, il existe une constante $B > 0$ telle que, pour toutes fonctions f et g dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^r)$ avec $\mathbf{E}_\mu[f] = \mathbf{E}_\mu[g] = 0$, et pour tout entier naturel m, on a*
$$|\mathbf{E}_\mu[f \circ T^m.g]|_\infty \leq B\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}e^{-sm\alpha},$$

avec $\alpha = \frac{\ln(\rho_0^{-1})}{2}$*. En particulier, si* $g = f$*, on obtient*

$$|C_f(m)|_\infty \leq B\|f\|_{H^s}^2 e^{-sm\alpha},$$

où $C_f(m)$ *est l'* **auto-covariance** *d'ordre* m *de* f : $C_f(m) = \mathbf{E}_\mu[f \circ T^m.f]$.

Ce résultat nous permettra d'établir (C_4). Pour obtenir les propriétés de décorrélation asymptotique (C_1') et (C_2') introduites au paragraphe précédent, C. Bardos, F. Golse et J-F. Colonna utilisent le résultat suivant.

Théorème 3.2.2 *Si* T *est* **hyperbolique***, alors il existe* $\beta_0 > 0$ *et* $\beta_1 > 0$ *tels que pour tout* $R \geq 1$*, on a*

$$Cov\left(\prod_{k=K_1}^{K_2} P^{(k)} \circ T^k, \prod_{l=L_1}^{L_2} Q^{(l)} \circ T^l\right) = 0,$$

pour tous polynômes trigonométriques $P^{(k)}$ *et* $Q^{(l)}$ *de degré inférieur à* R *(pour* $\|\cdot\|$*)) et tous entiers* K_1*,* K_2*,* L_1*,* L_2 *tels que*

$$K_1 \leq K_2 \leq K_2 + m(R) \leq L_1 \leq L_2,$$

avec $m(R) = \lceil \beta_0 \ln(R) + \beta_1 \rceil$.

Preuve. Nous notons $K_R = \{k \in \mathbf{Z}^n : \|k\| \leq R\}$. Il suffit de montrer que, pour tout entier $m \geq \left\lfloor \frac{\beta_0 \ln(R)+\beta_1}{2} \right\rfloor$, tout entier naturel N, tous U et V ensembles d'entiers inclus dans $\{m, \ldots, m+N\}$ et tous $\xi \in (K_R)^U$ et $\eta \in (K_R)^V$, on a

$$X_\xi^- + X_\eta^+ = 0 \quad \Rightarrow \quad X_\xi^- = X_\eta^+ = 0,$$

en notant

$$X_\xi^- = \sum_{k \in U} S^{-k}\xi_k \quad \text{et} \quad X_\eta^+ = \sum_{k \in V} S^k \eta_k.$$

Or, si r_0 est un réel vérifiant $\rho(S_{|F_u}^{-1}) < r_0 < 1$, on a

$$\begin{aligned} d\left(X_\xi^-, F_s\right) \leq \left\|\left(X_\xi^-\right)_u\right\| &\leq \sum_{k \in U} \|S^{-k}(\xi_k)_u\| \\ &\leq \sum_{k \in U} \|S_{|F_u}^{-k}\|.\|(\xi_k)_u\| \\ &\leq R\sum_{k \geq m} r_0^k = R\frac{r_0^m}{1-r_0}, \end{aligned}$$

si m est assez grand ($m \geq m_1$). De même si ρ_0 est un réel vérifiant $\rho_s < \rho_0 < 1$, on a

$$d\left(X_\eta^+, F_u\right) \leq \left\|\left(X_\eta^+\right)_s\right\| \leq R\frac{\rho_0^m}{1-\rho_0},$$

pour m assez grand ($m \geq m_2$). Donc, si $m \geq m_0 = \max(m_1, m_2)$, on a

$$X_\xi^- \in I_{R,m}^- := \left\{x \in \mathbf{R}^n : \|x_u\| \leq R\frac{r^m}{1-r}\right\}$$

et
$$X_\eta^+ \in I_{R,m}^+ := \left\{ x \in \mathbf{R}^n : \|x_s\| \leq R\frac{r^m}{1-r} \right\},$$
avec $r = \max(r_0, \rho_0) < 1$. $I_{R,M}^-$ et $I_{R,M}^+$ sont des voisinages de F_s et F_u respectivement. Supposons $X_\xi^- + X_\eta^+ = 0$, alors $X_\xi^- = -X_\eta^+$, donc X_ξ^- et X_η^+ sont tous deux dans $I_{R,m}^+ \cap I_{R,m}^- = \overline{B_{\|\cdot\|}\left(K'Rr^m\right)}$ (avec $K' = \frac{1}{1-r}$) car T (et donc S) est hyperbolique. Supposons $X_\xi^- \neq 0$, alors, d'après le théorème 3.1.2, on a
$$\left\| \left(X_\xi^- \right)_u \right\| \geq \frac{K_{(s)}}{R^{m_s} r^{m m_s}} > K'Rr^m,$$
pour $m > \frac{\ln(K_{(s)}) - \ln(K')}{(m_s+1)\ln r} - \frac{\ln R}{\ln r}$, ce qui contredit $\left\| \left(X_\xi^- \right)_u \right\| \leq K'Rr^m$, *cqfd.*

Remarque 3.2.3 *Dans le cas non hyperbolique, nous n'avons plus*
$$I_{R,m}^+ \cap I_{R,m}^- = \overline{B_{\|\cdot\|}\left(R\frac{r^m}{1-r}\right)}.$$
Nous ne pouvons donc plus utiliser le raisonnement précédent. Mais nous n'avons besoin ici que d'une propriété plus faible (résultat ci-dessous) vérifiée par tout automorphisme ergodique du tore, ainsi que nous le verrons dans l'annexe A.

Théorème 3.2.4 *Si T est* **ergodique**, *alors, pour toute fonction polynômiale g à coefficients positifs, il existe $\beta_0(g) > 0$ et $\beta_1(g) > 0$ tels que, pour tout $R \geq 1$, on a*
$$Cov\left(\prod_{k=K_1}^{K_2} P^{(k)} \circ T^k, \prod_{l=L_1}^{L_2} Q^{(l)} \circ T^l \right) = 0,$$
pour tous polynômes $P^{(k)}$ et $Q^{(l)}$ de degré inférieur à R (pour $\|\cdot\|$) et tous entiers K_1, K_2, L_1, L_2 tels que
$$K_1 \leq K_2 \leq K_2 + m \leq L_1 \leq L_2 \leq L_1 + g(m),$$
avec $m \geq \lceil \beta_0(g)\ln(R) + \beta_1(g) \rceil$.

Nous discuterons de ces propriétés de décorrélation en annexe. Elles sont essentielles pour la suite de la démonstration. Nous reprenons à présent la preuve donnée dans [BGC] en la généralisant à tout automorphisme ergodique du tore.

Théorème 3.2.5 *Soit T un automorphisme ergodique du tore et χ comme dans le 1 du théorème 3.2.1 telle que*
$$\chi(R) = O_{R\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{\ln R} \right)^6 \right).$$
Si f est dans $H_\chi \cap L^\infty(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^r)$ et vérifie $\mathbf{E}_\mu[f] = 0$ et $\sum_{\|k\|\geq R} |c_k(f)|_\infty \leq \|f\|_\infty \chi(R)$, pour tout $R > 0$; alors on a $\sup_{N\geq 1} \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N} f \circ T^k \right\|_{L^4(\mathbf{T}^n)} < +\infty$.

Preuve. Il suffit de montrer le résultat dans le cas où $r = 1$.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\mu\left[\left|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N} f\circ T^k\right|^4\right] &= \frac{1}{N^2}\sum_{k_1,k_2,k_3,k_4=0}^{N}\mathbf{E}_\mu\left[f\circ T^{k_1} f\circ T^{k_2} f\circ T^{k_3} f\circ T^{k_4}\right] \\ &\leq \frac{4!}{N^2}\sum_{0\leq k_1\leq k_2\leq k_3\leq k_4\leq N}\left|\mathbf{E}_\mu\left[f\circ T^{k_1} f\circ T^{k_2} f\circ T^{k_3} f\circ T^{k_4}\right]\right|,\end{aligned}$$

car il y a au plus $4!$ manières de réordonner (k_1, k_2, k_3, k_4). Nous notons

$$\begin{aligned}E &= \{(k_1,k_2,k_3,k_4) : 0\leq k_1\leq k_2\leq k_3\leq k_4\leq N\}, \\ E_1 &= \left\{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in E : k_i - k_{i-1}\leq N^{\frac{1}{3}}, i = 2,3,4\right\}, \\ E_2 &= \left\{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in E : k_2 - k_1 > N^{\frac{1}{3}}\right\}, \\ E_3 &= \left\{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in E : k_3 - k_2 > N^{\frac{1}{3}}\right\}, \\ E_4 &= \left\{(k_1,k_2,k_3,k_4)\in E : k_4 - k_3 > N^{\frac{1}{3}}\right\}.\end{aligned}$$

On a alors $E = E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$ et l'ensemble E_1 est disjoint de E_2, E_3 et E_4. Nous définissons $P_R(f)$ le terme d'ordre R (pour la norme $\|\cdot\|$) de la série de Fourier de f :

$$P_R(f) = \sum_{\|k\|\leq R} c_k(f)e^{2i\pi(k,\cdot)}.$$

Soient 4 fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 dans $L^\infty(\mathbf{T}^n,\mathbf{R})$, nous noterons

$$L^{(k)}(f_1,f_2,f_3,f_4) = \mathbf{E}_\mu\left[f_1\circ T^{k_1} f_2\circ T^{k_2} f_3\circ T^{k_3} f_4\circ T^{k_4}\right],$$

si $k = (k_1,k_2,k_3,k_4)\in\mathbf{N}^4$ et

$$L_F(f_1,f_2,f_3,f_4) = \sum_{k\in F}\left|L^{(k)}(f_1,f_2,f_3,f_4)\right|,$$

si F est un sous-ensemble de $\mathbf{N}^4$.

1. Soit $(k_1,k_2,k_3,k_4)\in E_1$, il y a $N+1$ manières de choisir k_1 et moins de $N^{\frac{1}{3}}+1$ manières de choisir $k_i - k_{i-1}$ pour chaque $i = 2,3,4$, donc $\#E_1\leq(N+1)(N^{\frac{1}{3}}+1)^3$. Donc
$$L_{E_1}(f,f,f,f)\leq(N+1)(N^{\frac{1}{3}}+1)^3\|f\|_\infty^4 = O(N^2).$$

2. Soit $j = 2,3,4$ et $k\in E_j$, on a
$$\begin{aligned}L^{(k)}(f,f,f,f) &= L^{(k)}(P_R(f),P_R(f),P_R(f),P_R(f)) + \\ &+ \underbrace{L^{(k)}(f-P_R(f),P_R(f),P_R(f),P_R(f))}_{a_3} + \\ &+ \underbrace{L^{(k)}(f,f-P_R(f),P_R(f),P_R(f))}_{a_2} + \\ &+ \underbrace{L^{(k)}(f,f,f-P_R(f),P_R(f))}_{a_1} + \\ &+ \underbrace{L^{(k)}(f,f,f,f-P_R(f))}_{a_0}.\end{aligned}$$

On majore $|f\circ T^{k_i}|$ par $\|f\|_\infty$, $|f\circ T^{k_i} - P_R(f)\circ T^{k_i}|$ par $\chi(R)\|f\|_\infty$ et $|P_R(f)\circ T^{k_i}|$ par $(1+\chi(R))\|f\|_\infty$. Ainsi, pour $i=0,1,2,3$, on a

$$|a_i| \leq \chi(R)(1+\chi(R))^i\|f\|_\infty^4.$$

Nous obtenons donc, en majorant $\#E_j$ par $(N+1)^4$,

$$|L_{E_j}(f,f,f,f) - L_{E_j}(P_R(f),P_R(f),P_R(f),P_R(f))| \leq 4(N+1)^4\chi(R)(1+\chi(R))^3\|f\|_\infty^4.$$

Posons $U=\{k_i; i<j\}$ et $V=\{k_i; i\geq j\}$, $P^{(k_i)}=P_R(f)$, $Q^{(k_i)}=P_R(f)$ et

$$K_1=k_1,\ K_2=k_{j-1},\ L_1=k_j \text{ et } L_2=k_4.$$

On a $K_1\leq K_2\leq K_2+N^{\frac{1}{3}}\leq L_1\leq L_2\leq N\leq L_1+N$. Prenons $g(X)=X^3$, $m=\lceil N^{\frac{1}{3}}\rceil$. Pour N assez grand, $m>\beta_1(g)$. On prend

$$R=R(N)=e^{\frac{m-\beta_1(g)}{\beta_0(g)}}>1.$$

On a alors $m>\beta_0(g)\ln R+\beta_1(g)$. Nous sommes donc sous les conditions d'orthogonalité de polynômes données dans le théorème 3.2.4. Nous avons donc

$$\mathbf{E}_\mu\left[\prod_{k\in U}P_R(f)\circ T^k\prod_{l\in V}P_R(f)\circ T^l\right]=\mathbf{E}_\mu\left[\prod_{k\in U}P_R(f)\circ T^k\right]\mathbf{E}_\mu\left[\prod_{l\in V}P_R(f)\circ T^l\right].$$

D'autre part,

$$\chi(R)=O\left(\left(\frac{\beta_0}{m-\beta_1}\right)^6\right)=O(N^{-2}),$$

donc $|L_{E_j}(f,f,f,f) - L_{E_j}(P_R(f),P_R(f),P_R(f),P_R(f))| = O(N^2)$. Il reste à voir que $L_{E_j}(P_R(f),P_R(f),P_R(f),P_R(f))$ est en $O(N^2)$.

3. Prenons $j=2,4$. Comme $c_0(f)=\mathbf{E}_\mu[f]=0$, on a $\mathbf{E}_\mu[P_R(f)]=0$ et, donc, $\mathbf{E}_\mu[P_R(f)\circ T^i]=0$ pour tout entier i car T préserve la mesure μ. Or, si $j=2$, alors $U=\{k_1\}$ et, si $j=4$, alors $V=\{k_4\}$. Donc $L_{E_j}(P_R(f),P_R(f),P_R(f),P_R(f))=0$. Donc $L_{E_j}(f,f,f,f)$ est en $O(N^2)$, pour $j=2,\ 4$.

4. Prenons $j=3$. On a $U=\{k_1,k_2\}$ et $V=\{k_3,k_4\}$. Or, soit $l\geq k$, le premier point du théorème 3.2.1 nous donne

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{E}_\mu\left[P_R(f)\circ T^k.P_R(f)\circ T^l\right]\right| &= \left|\mathbf{E}_\mu\left[P_R(f)\circ T^{l-k}.P_R(f)\right]\right|\\ &\leq A.\|f\|_2^2\chi(C_0\rho_0^{-\frac{l-k}{2}}).\end{aligned}$$

Donc $L_{E_3}(P_R(f),P_R(f),P_R(f),P_R(f))=$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k\in E_3}\left|\mathbf{E}_\mu\left[P_R(f)\circ T^{k_1}.P_R(f)\circ T^{k_2}\right]\right|.\left|\mathbf{E}_\mu\left[P_R(f)\circ T^{k_3}.P_R(f)\circ T^{k_4}\right]\right|\\ &\leq \left(A\|f\|_2^2\right)^2\sum_{1\leq k_1\leq k_2\leq N,\ 1\leq k_3\leq k_4\leq N}\chi(C_0\rho_0^{-\frac{k_2-k_1}{2}})\chi(C_0\rho_0^{-\frac{k_4-k_3}{2}})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(A\|f\|_2^2\right)^2 \left(\sum_{1\leq k\leq l\leq N} \chi(C_0\rho_0^{-\frac{l-k}{2}})\right)^2 \\
&\leq \left(A\|f\|_2^2\right)^2 \left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=k}^{N} \chi(C_0\rho_0^{-\frac{l-k}{2}})\right)^2 \\
&\leq \left(A\|f\|_2^2\right)^2 \left(N\sum_{l\geq 0} \chi(C_0\rho_0^{-\frac{l}{2}})\right)^2,
\end{aligned}
$$

car χ est à valeurs positives. Or

$$
\chi(C_0\rho_0^{-\frac{l}{2}}) = O\left(\left(\ln(C_0\rho_0^{-\frac{l}{2}})\right)^{-6}\right) = O(l^{-6}).
$$

Donc

$$
\sum_{l\geq 0} \chi(C_0\rho_0^{-\frac{l}{2}}) < +\infty.
$$

On en déduit que $L_{E_3}(P_R(f), P_R(f), P_R(f), P_R(f))$ est en $O(N^2)$. Ainsi, $L_{E_3}(f, f, f, f)$ est également en $O(N^2)$, *cqfd.*

Théorème 3.2.6 *Soient T un automorphisme ergodique du tore $\mathbf{T}^n$, un réel $\tau > 0$ et a dans $C^{d+2}(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^d)$ avec $\mathbf{E}_\mu[a] = 0$. Pour toutes fonctions f et g dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ avec $\frac{d}{2} < s$, on a*

$$
\lim_{\varepsilon\to 0} Cov\left(f\left(\varepsilon\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor} a\circ T^k\right), g\left(\varepsilon\sum_{l=\lfloor \frac{t+\varepsilon}{\varepsilon^2}\rfloor+1}^{\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\rfloor} a\circ T^l\right)\right) = 0.
$$

On montre en fait :

Remarque 3.2.7 *Sous les hypothèses du théorème 3.2.6; si $\delta : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}_+^*$ et si l'une des conditions suivantes est vérifiée*

1. *T est* **hyperbolique** *et on a $0 < \delta(\varepsilon) \leq \tau - \varepsilon^2$, pour ε assez petit et*
$$
\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = +\infty;
$$
2. *T est* **quasi-hyperbolique** *et $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$;*

alors, pour tout $t \geq 0$, il existe un réel $\varepsilon_0 > 0$, trois constantes $\hat{C}, C', C" \geq 0$ telles que, pour tout $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ et pour toutes fonctions f et g dans l'espace de Sobolev $H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ avec $\frac{d}{2} < s$, on a la majoration

$$\left|Cov\left(f\left(\varepsilon\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor}a\circ T^k\right),g\left(\varepsilon\sum_{l=\lfloor\frac{t+\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\rfloor}a\circ T^l\right)\right)\right|\leq$$

$$\leq \|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}\left(\hat{C}\frac{\varepsilon^{s-d}}{\left(s-\frac{d}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}+2^d\varepsilon^{-d}H(K,\delta(\varepsilon),\varepsilon)\right),$$

avec

$$H(K,\delta,\varepsilon)=\frac{C"}{\varepsilon^2}e^{-\frac{C'\delta}{\varepsilon^2}}\exp\left(\frac{C"}{\varepsilon^2}e^{-\frac{C'\delta}{\varepsilon^2}}\right).$$

Preuve. il existe un réel $\varepsilon_1>0$ tel que pour tout $\varepsilon\leq\varepsilon_1$, on a $\delta(\varepsilon)\leq\tau-\varepsilon^2$ et $\delta(\varepsilon)\geq\varepsilon^2$. Prenons $\varepsilon\leq\varepsilon_1\wedge 1$. Pour simplifier les écritures, nous écrirons δ à la place de $\delta(\varepsilon)$. Soit $h=f,g$. Posons $\tilde{h}:=\int_{\mathbf{R}^d}\hat{h}(\xi)e^{2i\pi\langle\xi,\cdot\rangle}\,d\xi$. On a $h(x)=\tilde{h}(x)$ pour presque tout x dans $\mathbf{R}^d$. Posons

$$\tilde{h}_\varepsilon:=\int_{\|\xi\|\leq\frac{1}{\varepsilon}}\hat{h}(\xi)e^{2i\pi\langle\xi,\cdot\rangle}\,d\xi.$$

On peut montrer qu'il existe deux constantes $K>0$ et $L>0$ indépendantes de f et de g telles que

$$\|\tilde{h}-\tilde{h}_\varepsilon\|_\infty\leq K\|h\|_{H^s}.\frac{\varepsilon^{s-\frac{d}{2}}}{(\frac{2s-d}{d})^{\frac{1}{2}}}\quad\text{et}\quad\|\tilde{h}_\varepsilon\|_\infty\leq L\|h\|_{H^s}2^{\frac{d}{2}}\varepsilon^{-\frac{d}{2}};$$

pour obtenir la première majoration, on multiplie par $\frac{|\xi|_\infty^s}{|\xi|_\infty^s}$ et on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Notons $..=\varepsilon\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\rfloor}a\circ T^k$ et $...=\varepsilon\sum_{l=\lfloor\frac{t+\delta}{\varepsilon^2}\rfloor+1}^{\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\rfloor}a\circ T^l$.

$$\begin{aligned}\text{On a } R_\varepsilon &:= Cov(f(..),g(...))-Cov(\tilde{f}_\varepsilon(..),\tilde{g}_\varepsilon(...))\\ &= Cov\left((f-\tilde{f}_\varepsilon)(..),g(...)\right)+Cov\left(\tilde{f}_\varepsilon(..),(g-\tilde{g}_\varepsilon)(...)\right).\end{aligned}$$

En utilisant les majorations obtenues précédemment, on majore $|R_\varepsilon|$ par

$$\hat{C}\frac{\varepsilon^{s-d}}{\left(s-\frac{d}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s},$$

ce qui nous donne le premier terme de la majoration. Il reste à majorer

$$\left|Cov\left(\tilde{f}_\varepsilon(..),\tilde{g}_\varepsilon(...)\right)\right|.$$

Or, par Fubini, nous obtenons

$$Cov\left(\tilde{f}_\varepsilon(..),\tilde{g}_\varepsilon(...)\right)=\int_{\|\xi\|,\|\eta\|\leq\frac{1}{\varepsilon}}\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)Cov\left(e^{2i\pi<\xi,..>},e^{2i\pi<\eta,...>}\right)\,d\xi d\eta.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz nous donne $\left|Cov\left(\tilde{f}_\varepsilon(..), \tilde{g}_\varepsilon(...)\right)\right| \leq \alpha.\beta$ avec

$$\alpha = \left(\int_{\|\xi\|,\|\eta\|\leq\frac{1}{\varepsilon}} \left|\hat{f}(\xi)\hat{g}(\eta)\right|^2 d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\hat{f}\|_{L^2}.\|\hat{g}\|_{L^2} \leq \|f\|_{H^s}.\|g\|_{H^s}$$

et

$$\beta = \left(\int_{\|\xi\|,\|\eta\|\leq\frac{1}{\varepsilon}} \left|Cov\left(\prod_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} \theta_{\varepsilon\xi}\circ T^k, \prod_{l=\left\lfloor\frac{t+\delta}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} \theta_{\varepsilon\eta}\circ T^l\right)\right|^2 d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{2}},$$

avec $\theta_\xi = e^{2i\pi<\xi,a(\cdot)>}$. Nous notons $P_R(\theta_\xi)$ le terme d'ordre R (pour la norme $\|\cdot\|$) de la série de Fourier associée à θ_ξ, à savoir

$$P_R(\theta_\xi) = \sum_{\|k\|<R} c_k(\theta_\xi)e^{2i\pi<k,\cdot>} \in L^2(\mu).$$

On a $Cov\left(\prod_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} \theta_{\varepsilon\xi}\circ T^k, \prod_{l=\left\lfloor\frac{t+\delta}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} \theta_{\varepsilon\eta}\circ T^l\right) =$

$$= \underbrace{Cov\left(\prod_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} P_R(\theta_{\varepsilon\xi})\circ T^k, \prod_{l=\left\lfloor\frac{t+\delta}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} P_R(\theta_{\varepsilon\eta})\circ T^l\right)}_{a_\varepsilon} +$$

$$\underbrace{+Cov\left(\prod_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} \theta_{\varepsilon\xi}\circ T^k - \prod_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} P_R(\theta_{\varepsilon\xi})\circ T^k, \prod_{l=\left\lfloor\frac{t+\delta}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} \theta_{\varepsilon\eta}\circ T^l\right)}_{b_\varepsilon} +$$

$$\underbrace{+Cov\left(\prod_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} P_R(\theta_{\varepsilon\xi})\circ T^k, \prod_{l=\left\lfloor\frac{t+\delta}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} \theta_{\varepsilon\eta}\circ T^l - \prod_{l=\left\lfloor\frac{t+\delta}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} P_R(\theta_{\varepsilon\eta})\circ T^l\right)}_{c_\varepsilon}.$$

Nous allons appliquer le théorème 3.2.2 (resp. théorème 3.2.4) au terme a_ε en prenant $P^{(k)} = P_R(\theta_{\varepsilon\xi})$, $Q^{(l)} = P_R(\theta_{\varepsilon\eta})$,

$$K_1 = 0 \leq K_2 := \left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor \leq K_2 + m \leq L_1 := \left\lfloor\frac{t+\delta}{\varepsilon^2}\right\rfloor + 1$$

et

$$L_1 \leq L_2 := \left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor \leq L_1 + \frac{\tau}{\varepsilon^2} + 1,$$

en posant $m = \left\lfloor\frac{\delta}{\varepsilon^2}\right\rfloor$.

1. Dans le cas hyperbolique, on prend $\beta_0 = \beta_0$ et $\beta_1 = \beta_1$.

2. Dans le cas quasi-hyperbolique, avec $\delta = \varepsilon$, on prend $g(X) = \tau X^2 + 1$. On a bien $L_2 \leq L_1 + g(m)$. Prenons alors $\beta_0 = \beta_0(g)$ et $\beta_1 = \beta_1(g)$.

Comme $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta}{\varepsilon^2} = +\infty$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ (avec $\varepsilon_0 \leq \varepsilon_1 \wedge 1$) tel que si $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ (ce que nous supposerons à présent), on a $m > \beta_1$. On prend alors $R = e^{\frac{m-\beta_1}{\beta_0}}$, on a $R > 1$ et $m \geq \beta_0 \ln R + \beta_1$. D'après le théorème 3.2.2 (resp. 3.2.4), on a $a_\varepsilon = 0$. Il reste à présent à majorer b_ε et c_ε. Nous majorons en module, les deux termes de b_ε par

$$\left\| \prod_{k=0}^{\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \right\rfloor} \theta_{\varepsilon\xi} \circ T^k - \prod_{k=0}^{\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \right\rfloor} P_R(\theta_{\varepsilon\xi}) \circ T^k \right\|_\infty . \left\| \prod_{l=\left\lfloor \frac{t+\delta}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \right\rfloor} \theta_{\varepsilon\eta} \circ T^l \right\|_\infty .$$

Posons $A_{\xi,R} = \sum_{||k||>R} |c_k(\theta_\xi)| \in [0; +\infty]$. Comme θ_ξ est continue, on a

$$\|P_R(\theta_\xi) - \theta_\xi\|_\infty \leq A_{\xi,R}.$$

D'autre part, comme $\|\theta_\xi\|_\infty = 1$, l'inégalité triangulaire nous donne

$$\| |P_R(\theta_\xi)| - 1 \|_\infty \leq \|P_R(\theta_\xi) - \theta_\xi\|_\infty.$$

Par conséquent, on a $\|P_R(\theta_\xi)\|_\infty \leq 1 + A_{\xi,R}$. Comme a est de classe C^{d+2}, on établit la majoration suivante

$$A_R = \sup_{||\xi|| \leq 1} A_{\xi,R} \leq \frac{C}{R},$$

en remarquant que $|c_k(\theta_\xi)| \leq M \frac{\sum_{i=1}^d \left| c_k \left(\frac{\partial^r}{\partial x_i^r} \theta_\xi \right) \right|}{||k||^r}$ et en utilisant la formule de $(f \circ g)^{(r)}$ en fonction des dérivées successives de f et de g, pour $f = e^{2i\pi \cdot}$ et $g : x_i \mapsto < \xi, a(x) >$. Or on a pris

$$R = e^{\frac{m-\beta_1}{\beta_0}} = e^{\frac{1}{\beta_0} \left\lfloor \frac{\delta}{\varepsilon^2} \right\rfloor} e^{-\frac{\beta_1}{\beta_0}} \geq e^{\frac{1}{\beta_0} \frac{\delta}{\varepsilon^2}} e^{-\frac{1}{\beta_0} - \frac{\beta_1}{\beta_0}}.$$

Puis, on remarque que $\left(\int_{|\xi|_\infty, |\eta|_\infty \leq \frac{1}{\varepsilon}} d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^d$. On conclut en montrant que

$$\begin{aligned} |b_\varepsilon + c_\varepsilon| &\leq 4 \left(\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \right) A_R (1 + A_R)^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1} \\ &\leq 4 A_R \left(\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \right) . e^{A_R \left(\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1 \right)}. \end{aligned}$$

Cette majoration découle de la formule $\prod_{i=\alpha}^\beta a_i - \prod_{i=\alpha}^\beta b_i = \sum_{k=\alpha}^\beta \left(\left(\prod_{j<k} b_j \right) (a_k - b_k) \left(\prod_{i>k} a_i \right) \right)$, *cqfd.*

Théorème 3.2.8 *Soient T, a et τ comme dans le théorème 3.2.6. Si f est une fonction bornée et est dans $H^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ avec $s = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$ et si g est une fonction de classe $\mathcal{C}^s(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ vérifiant*

$$|g(x)|^2 + \sum_{1 \leq |l| \leq \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1} \left| D^l g(x) \right|^2 \leq C_g^2 \max(1, |x|_\infty^2),$$

alors $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N} a\circ T^k$ *est bornée dans* L^4 *uniformément en* N *et on a*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} Cov\left(f\left(\varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a\circ T^k\right), g\left(\varepsilon\sum_{l=\left\lfloor\frac{t+\varepsilon}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a\circ T^l\right)\right)=0.$$

Preuve. Le cas $a\equiv 0$ $p.p$ étant évident, nous supposerons $\|a\|_\infty\neq 0$. Montrons tout d'abord que $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=1}^{N} a\circ T^k$ est bornée dans L^4 uniformément en N. Pour cela, nous allons appliquer le théorème 3.2.5. Comme a est de classe C^3 donc est dans H^3, nous savons déjà que a est dans $H_{\chi'}$ avec $\chi'(R)=C_0R^{-3}\|a\|_{H^s}\|a\|_2^{-1}$, pour une certaine constante $C_0>0$. D'autre part, de même que dans la démonstration précédente, on obtient

$$\sum_{\|k\|\geq R}|c_k(a)|_\infty\leq\frac{C}{LR}=\chi"(R).\|a\|_\infty,$$

où on a posé $\chi"(R):=C(LR)^{-1}\|a\|_\infty^{-1}$. On applique le théorème 3.2.5 à a avec $\chi=\max(\chi',\chi")$. On a bien $\chi(R)=O\left((\ln(R))^{-6}\right)$. Soit χ_1 une fonction plateau de classe $C^\infty(\mathbf{R}^d)$ telle que

$$\chi_1(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } |x|_\infty\leq 1\\ 0 & \text{si } |x|_\infty\geq 2\\ \in[0;1] & \text{sinon}\end{cases}.$$

Soit un réel $M>1$. Nous notons $\chi_M:=\chi_1\left(\frac{\cdot}{M}\right)$, alors $g_M:=g.\chi_M$ est dans $H^s(\mathbf{R}^d,\mathbf{R})$. Soient $..=\varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a\circ T^k$ et $...=\varepsilon\sum_{l=\left\lfloor\frac{t+\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a\circ T^l$, on a

$$|Cov\left(f(..),g(...)\right)|\leq A_M+B_M,$$

avec

$$A_M:=|Cov\left(f(..),g_M(...)\right)|$$

et

$$\begin{aligned} B_M &:= |Cov\left(f(..),(g-g_M)(...)\right)|\\ &\leq 2\|f\|_\infty.\mathbf{E}_\mu\left[\mathbf{1}_{\{|...|_\infty\geq M\}}|g(...)|\right]\\ &\leq 2\|f\|_\infty.\left(\mu\left(\{|...|_\infty\geq M\}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.\left(\mathbf{E}_\mu\left[g^2(...)\right]\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

en majorant $|f|$ par $\|f\|_\infty$ et $|g-g_M|$ par $|g|\mathbf{1}_{\{|x|_\infty\geq M\}}$, puis en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz. Or, l'inégalité de Bienaymé-Tchebytcheff nous donne

$$\mu\left(\{|...|_\infty\geq M\}\right)\leq\frac{d}{M^4}\|...\|_{L^4(\mu)}^4=\frac{d}{M^4}\left\|\varepsilon\sum_{k=\left\lfloor\frac{t+\delta(\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a\circ T^k\right\|_{L^4(\mu)}^4$$

$$\leq d\frac{(\tau-\delta(\varepsilon))^2}{M^4}\sup_N\left\|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N} a\circ T^k\right\|_{L^4(\mu)}^4,$$

et

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_\mu\left[g^2(\ldots)\right] &\leq dC_g^2\left(1+\|\ldots\|_{L^2(\mu)}^2\right)\\
&\leq dC_g^2\left(1+(\tau-\delta(\varepsilon))\sup_N\left\|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N}a\circ T^k\right\|_{L^4(\mu)}^2\right).
\end{aligned}
$$

On prend ici $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. On se donne $\alpha>0$, on fixe M tel qu'on a $B_M\leq\frac{\alpha}{2}$; d'après le théorème 3.2.6, pour ε assez petit, on aura $A_M\leq\frac{\alpha}{2}$, *cqfd.*

Théorème 3.2.9 *Si T est un automorphisme ergodique du tore $\mathbf{T}^n$ et si a est dans $H^s(\mathbf{T}^n)$ avec $s\geq 1$, alors la suite de matrices*

$$
\left(\mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}a\circ T^k\right)^{\otimes 2}\right]\right)_N
$$

converge vers une matrice positive notée $D(a)$ égale à

$$
D(a)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\mathbf{E}_\mu[a\circ T^m\otimes a]
$$

et l'hypothèse (C_4) est donc vérifiée.

Preuve. Ceci résulte du théorème 3.2.1, *cqfd.*

Remarque 3.2.10 *Ce résultat est fondamental pour tout ce qui relève du TCL: il s'agit d'un résultat de convergence de la matrice de covariance de la suite de v.a $\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N}a\circ T^k\right)_N$. Nous le rencontrerons à nouveau dans le paragraphe 4.*

Nous établissons ainsi le théorème A que nous rappelons:

Théorème A *Si T est un automorphisme ergodique du tore $\Omega=\mathbf{T}^n$ $(n\geq 2)$ et si a est dans $C^{d+2}(\mathbf{T}^n,\mathbf{R}^d)$ et vérifie $\mathbf{E}_\mu[a]=0$, alors il existe une matrice symétrique positive $D(a)$, limite de la suite de matrices $\left(\mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1}a\circ T^k\right)^{\otimes 2}\right]\right)_N$ telle que, pour toute fonction $\varphi:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ continue bornée, on a*

1. *$\psi_\varepsilon(t,x,\omega)\longrightarrow_{\varepsilon\to 0}u(t,x)$, pour la topologie faible$*$ sur $L^\infty\left(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega\right)$,*
2. *$u_\varepsilon(t,x)\longrightarrow_{\varepsilon\to 0}u(t,x)$, uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d$,*

où u est l'unique fonction de classe $C^{1,2}(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d)$, solution de l'équation de la chaleur

$$
\frac{d}{dt}u=\frac{1}{2}D(a):\nabla_x^2 u,
$$

avec la condition initiale $u(0,\cdot)\equiv\varphi$; i.e. $u(t,x)=\mathbf{E}_\mu\left[\varphi\left(x-B_t\right)\right]$ où $B=(B_t)_t$ est un mouvement brownien sur $\mathbf{R}^d$, centré, de variance $D(a)$.

Preuve. D'après la remarque 1 faite en début d'article, il suffit de montrer les convergences 1 et 2 pour toute fonction φ de classe C_K^∞. Soit φ une telle fonction, elle vérifie alors $\varphi \in C_b^3(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ et $\nabla\varphi$ est dans $H^{s+1}(\mathbf{R}^d, \mathbf{R})$ avec $s = \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + 1$. Le schéma de démonstration est donné par le diagramme suivant, dans lequel les numéros correspondent aux numéros des théorèmes vus précédemment.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & 3.2.4 & \rightarrow & 3.2.6 & \rightarrow & 3.2.8 & \rightarrow & (C_1') & \rightarrow & (C_1) \\
 & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & & \\
3.1.1 & \rightarrow & 3.1.2 & \rightarrow & 3.2.1 & \rightarrow & 3.2.5 & \rightarrow & (C_3) & & (C_2') & \rightarrow & (C_2) \\
 & & & & \downarrow & & & & & & & & \\
 & & & & 3.2.9 & \rightarrow & (C_4) & & & & & &
\end{array}$$

Tout d'abord, d'après le théorème 3.2.8, nous avons

$$\sup_N \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a \circ T^k \right\|_{L^4(\mu)} < +\infty,$$

donc $\sup_N \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N a \circ T^k \right\|_{L^r(\mu)} < +\infty$, pour $r = 1, \ldots, 4$. Nous sommes donc bien sous les hypothèses de la proposition 1 qui nous donne le résultat de relative compacité uniforme sur tout compact $[0; \tau] \times X$. Le théorème 3.2.8 nous donne

(C_1') et donc (C_1), en prenant $f = (\nabla_x \varphi)_i\,(x - \cdot)$ et $g(y) = y_i$, i décrivant $\{1, ..., d\}$;

(C_2') et donc (C_2), en prenant $f = (\nabla_x^2 \varphi)_{i,j}\,(x - \cdot)$ et $g(y) = y_i y_j$, i et j décrivant $\{1, ..., d\}$.

D'autre part, (C_3) est vérifiée car

$$\sup_N \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^N a \circ T^k \right\|_{L^3} < +\infty.$$

Les hypothèses de la proposition 2.2.4 qui nous donne la convergence faible$*$ et la convergence uniforme sur tout compact sont donc vérifiées. Comme T est ergodique, les hypothèses de la proposition 2.2.5 sont également vérifiées, d'où le résultat de convergence faible$*$ sur $L^\infty\left(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^n\right)$. On conclut comme pour la proposition 2.2.6, *cqfd.*

Remarque 3.2.11 *La démonstration de ce théorème repose sur les "bonnes propriétés" algébriques des automorphismes du tore (qui nous permettent d'utiliser la série de Fourier et la transformée de Fourier) et sur la propriété d'ergodicité qui nous donne le théorème 3.2.4 de décorrélation des polynômes.*

3.3 Cobords et dégénérescence du processus limite

Le théorème A correspond à une forme de convergence vers un mouvement brownien éventuellement "dégénéré" de matrice de covariance $D(a)$, c'est-à-dire un PAIS (Processus à Accroissements Indépendants et Stationnaires) B tel que la loi de B_t soit $\mathcal{N}(0, tD(a))$, en acceptant le cas dégénéré $\mathcal{N}(0,0) = \delta_0$. Soit $m = rang(D(a))$; on parle de **mouvement brownien dégénéré de dimension** m si $m < d$ et de **mouvement brownien** (MB, en abrégé) (non dégénéré) si

$m = d$, c'est-à-dire si $det(D(a)) > 0$. Voyons à quelles conditions le MB limite est non dégénéré. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$ un système dynamique mesuré.

Définition 3.3.1 *On appelle* **cobord dans** $L^2(\Omega)$ *toute fonction f de $L^2(\Omega)$ telle qu'il existe une fonction g de $L^2(\Omega)$ telle que $f = g - g \circ T$.*

De même, une v.a f définie sur Ω est appelée **cobord mesurable** *s'il existe une v.a g définie sur Ω telle qu'on a $f = g - g \circ T$.*

Il est facile de voir que, si T est ergodique, alors l'ensemble $\{f - f \circ T;\ f \in L^2(\Omega)\}$ des cobords dans L^2 est dense dans $\{f \in L^2(\Omega) : \mathbf{E}_\mu[f] = 0\}$.

Définition 3.3.2 *Deux fonctions f et g dans $L^2(\Omega)$ sont dites* **homologues dans** L^2 *si $f - g$ est un cobord dans L^2. On écrira $f \sim g$.*

Remarque 3.3.3 *Soit f une v.a.r (variable aléatoire réelle) sur $(\Omega, \mathcal{F})$. Si f est un cobord mesurable, alors $\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n\right)_N$ converge en probabilité, donc en loi, vers 0.*

Preuve. En effet, si f est de la forme $f = g - g \circ T$ (avec g mesurable), alors on a

$$\mu\left(\left|\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} f \circ T^n\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2\mu\left(|g| \geq \frac{\sqrt{N}\varepsilon}{2}\right),$$

cqfd.

Proposition 3.3.4 *Si T est un automorphisme ergodique du tore et si a est une fonction dans $H^s(\mathbf{T}^n, \mathbf{R}^d)$ avec $\mathbf{E}_\mu[a] = 0$. Soit $\xi \in \mathbf{R}^d$, les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *$D(a)\xi = 0$.*
2. *${}^t\xi D(a)\xi = 0$.*
3. *${}^t\xi f_N$ est bornée dans $L^2(\mathbf{T}^n)$ uniformément relativement à N, avec $f_N = \sum_{n=0}^{N-1} a \circ T^n$.*
4. *${}^t\xi a$ est un cobord dans L^2.*

Preuve. Nous allons utiliser une démonstration circulaire. Il est clair que *1* $\Rightarrow$ *2*. Montrons à présent que *2* $\Rightarrow$ *3*. On établit facilement l'égalité suivante :

$$\mathbf{E}_\mu\left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} {}^t\xi a \circ T^k\right)^2\right] = c_0\left(g.NF_N\right),$$

où F_N est le noyau de Fejer d'ordre N et g la fonction de classe $C^\infty(\mathbf{T})$ (d'après le point 2 du théorème 3.2.1) définie par

$$g = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \mathbf{E}_\mu\left[{}^t\xi a \circ T^n . {}^t\xi a\right] e^{2i\pi n \cdot}.$$

Ainsi, il vient

$$\mathbf{E}_\mu\left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} {}^t\xi a \circ T^k\right)^2\right] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{g(t)+g(-t)-2g(0)}{2(\sin(\pi t))^2}(\sin(\pi N t))^2 dt + Ng(0).$$

Or $g(0) = {}^t\xi D(a)\xi$, donc est nul par hypothèse. D'autre part, en effectuant deux développements de Taylor, on obtient

$$g(t)+g(-t)-2g(0) \leq \|g"\|_\infty t^2.$$

Donc

$$\mathbf{E}_\mu\left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} {}^t\xi a \circ T^k\right)^2\right] \leq \|g"\|_\infty \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{t^2}{2(\sin(\pi t))^2} dt < +\infty.$$

Montrons que *3* $\Rightarrow$ *4*. Supposons $({}^t\xi f_N)_N$ bornée dans L^2. D'après le théorème de Banach-Alaoglu, $({}^t\xi f_N)_N$ est relativement compacte dans L^2 pour la topologie faible$*$. Soit f^ξ une valeur d'adhérence. Alors, quitte à prendre une sous-suite, nous avons, pour toute fonction $g \in L^2$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_\mu[(f^\xi - f^\xi \circ T)g] &= \lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu[({}^t\xi f_N - {}^t\xi f_N \circ T)g] \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu[({}^t\xi a - {}^t\xi a \circ T^N)g] \\
&= \mathbf{E}_\mu[{}^t\xi a g].
\end{aligned}$$

En effet, $\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu[{}^t\xi a \circ T^N g] = 0$ car $\sum_{k=0}^{N-1} {}^t\xi a \circ T^k g$ est bornée dans L^1 (d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz). Donc ${}^t\xi a$ est un cobord dans L^2. Il reste à voir que *4* $\Rightarrow$ *1*. Supposons que ${}^t\xi a$ s'écrive sous la forme ${}^t\xi a = g - g\circ T$, avec g dans L^2. Il vient

$$\begin{aligned}
D(a)\xi &= \lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu\left[\sum_{k=-N}^{N} (a\circ T^k \otimes a)\xi\right] \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu\left[\sum_{k=-N}^{N} a\circ T^k \; {}^t a\xi)\right] \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu\left[\sum_{k=-N}^{N} a\circ T^k (g - g\circ T)\right] \\
&= \lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu\left[(a\circ T^N - a\circ T^{-N-1})g\right],
\end{aligned}$$

car T préserve la mesure μ. Or, en utilisant le deuxième point du théorème 3.2.1 et le fait que l'espace de Sobolev H^s est dense dans L^2, on a

$$\lim_{N\to\pm\infty} \mathbf{E}_\mu\left[a\circ T^N.g\right] = 0,$$

cqfd.

Remarque 3.3.5 *En particulier, sous les hypothèses de la proposition,*

1. *Si $d = 1$, alors $D(a) = 0$ si et seulement si a est un cobord.*

2. *Si d est un entier naturel non nul quelconque, $D(a)$ est non dégénérée si et seulement si on a, pour tout vecteur $\xi \neq 0$, ${}^t\xi D(a)\xi \neq 0$, i.e, d'après ce qui précède, si pour tout vecteur $\xi \neq 0$, ${}^t\xi a$ n'est pas un cobord dans L^2.*

4 Méthode des martingales

Dans ce paragraphe, on considère un système dynamique mesuré $(\Omega, \mathcal{F}, \mu, T)$. Ainsi que nous le signalons dans la remarque 4.2.7, le théorème B peut être établi directement à l'aide du théorème C et des remarques 4.2.1 et 1.0.2.

4.1 Introduction

Certains théorèmes limites classiques valables pour les sommes de v.a indépendantes se généralisant, sous certaines hypothèses, aux martingales à accroissements stationnaires et ergodiques, l'objet de ce chapitre est d'appliquer les résultats de compacité et de convergence donnés dans le paragraphe 2.2, mais cette fois dans le cas des différences de martingale et dans le cas de processus stationnaires $(X_k)_k$ avec X_0 homologue à une fonction engendrant une suite de différences de martingale. On démontrera ainsi le théorème B qui nous assure d'une convergence du type de celle de la conclusion du théorème A toutes les fois qu'il est possible de "réduire" les sommes ergodiques $\sum a \circ T^k$, par "homologie", à une martingale. À titre d'exemple, nous rappelons des résultats de Stéphane Le Borgne montrant que cette réduction est possible pour les automorphismes ergodiques du tore. On retrouve ainsi le théorème A.

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1 *Une suite de v.a $(X_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de carré intégrable est une suite de* **différences de martingale** *(DM, en abrégé) par rapport à une filtration (i.e une suite croissante de sous-tribus) $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{F}$ si*

1. *X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, pour tout entier $n \geq 0$,*
2. *$\mathbf{E}_\mu[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$, pour tout entier $n \geq 0$.*

Alors, $\left(S_n := \sum_{k=0}^{n-1} X_k\right)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_{n-1})_{n\geq 0}$.

Soit $\mathcal{F}_0$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{F}_{-1}:=T\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_0$. Soit $a = X_0 : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ une v.a centrée et de carré intégrable. On dit que a **engendre une suite de différences de martingales** si $(X_n = a \circ T^n)_{n\geq 0}$ est une suite de différences de martingales relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n:=T^{-n}\mathcal{F}_0)_{n\geq 0}$, i.e. si a est $\mathcal{F}_0$-mesurable et orthogonale à $\mathcal{F}_{-1}$ (i.e. $\mathbf{E}_\mu[a|\mathcal{F}_{-1}] = 0$).

4.2 Martingales à accroissements stationnaires ergodiques

Nous supposerons T ergodique. Soit $a = X_0 : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbf{R}^d, \mathcal{B}(\mathbf{R}^d))$ une v.a centrée, de carré intégrable et de variance $\sigma^2 = \mathbf{E}_\mu[a^{\otimes 2}]$. Supposons que a engendre une suite de différences de martingales par rapport à $(\mathcal{F}_n = T^{-n}\mathcal{F}_0)_{n\geq 0}$. Nous notons $X_k = a \circ T^k$ et $S_n = S_n(a) = \sum_{k=0}^{n-1} a \circ T^k$.

Remarque 4.2.1 *Soient m et n deux entiers naturels. On a*

$$\mathbf{E}_\mu\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k\right)^{\otimes 2}\right] = \sigma^2.$$

En particulier, on a (C_4) avec $D(a) = \sigma^2$.

Preuve. en utilisant l'orthogonalité et la stationnarité des X_k, *cqfd.*

4.2.1 Vérification des conditions (C_i)

Soit $\varphi : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C_b^3.

Proposition 4.2.2 *On a*

$$\mathbf{E}_\mu\left[\nabla_x\varphi\left(x - \varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_k\right).\varepsilon\sum_{l=\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_l\right] = 0.$$

En particulier, (C_1) est bien vérifiée.

Preuve. Ceci résulte de la propriété d'accroissements de martingales, *cqfd.*

Proposition 4.2.3 *Si a est dans L^2, alors (C_2) est satisfaite.*

Preuve. $\mathbf{E}_\mu\left[\nabla_x^2\varphi\left(x - \varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_k\right) : \left(\varepsilon\sum_{l=\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_l\right)^{\otimes 2}\right] =$

$$= \mathbf{E}_\mu\left[\nabla_x^2\varphi\left(x - \varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_k\right) : \left(\varepsilon^2\sum_{l,m=\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_l\otimes X_m\right)\right].$$

Or, si $\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1 \le l < m \le \left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor$, alors $\nabla_x^2\varphi\left(x - \varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_k\right)$ est $\mathcal{F}_l$-mesurable et $\mathbf{E}_\mu\left[X_l\otimes X_m|\mathcal{F}_l\right] = X_l \otimes \underbrace{\mathbf{E}_\mu\left[X_m|\mathcal{F}_l\right]}_{=0}$. Ainsi,

$$\mathbf{E}_\mu\left[\nabla_x^2\varphi\left(x - \varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_k\right) : \left(\varepsilon\sum_{l=\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_l\right)^{\otimes 2}\right] =$$

$$= \mathbf{E}_\mu\left[\nabla_x^2\varphi\left(x - \varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_k\right) : \left(\varepsilon^2\sum_{l=\left\lfloor\frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor\frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a^{\otimes 2}\circ T^l\right)\right].$$

Or, d'après le théorème ergodique dans L^1, comme $a^{\otimes 2} \in L^1$, on a

$$\frac{1}{N_{\varepsilon,t,t+\tau}} \sum_{l=\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a^{\otimes 2} \circ T^l \xrightarrow{L^1} \sigma^2;$$

et, d'autre part, $N_{\varepsilon,t,t+\tau} \sim_{\varepsilon\to 0} \frac{\tau}{\varepsilon^2}$. Ainsi,

$$\varepsilon^2 \sum_{l=\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a^{\otimes 2} \circ T^l \xrightarrow{L^1} \tau\sigma^2.$$

En particulier, $\mathbf{E}_\mu\left[\varepsilon^2 \sum_{l=\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a^{\otimes 2} \circ T^l\right] \longrightarrow \tau\sigma^2$. Comme $\|\nabla^2\varphi\|_\infty < +\infty$, il vient

$$\left|\mathbf{E}_\mu\left[\nabla_x^2\varphi\left(x - \varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_k\right) : \left(\left(\varepsilon \sum_{l=\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_l\right)^{\otimes 2} - \tau\sigma^2\right)\right]\right| \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} 0,$$

et

$$\left|\mathbf{E}_\mu\left[\nabla_x^2\varphi\left(x - \varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_k\right)\right] : \mathbf{E}_\mu\left[\left(\varepsilon \sum_{l=\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} X_l\right)^{\otimes 2} - \tau\sigma^2\right]\right| \longrightarrow_{\varepsilon\to 0} 0,$$

cqfd.

Dans le cas où a est dans L^4, il est facile de montrer que

$$\sup_{N\geq 1}\left\|\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} a\circ T^k\right\|_{L^3} < +\infty.$$

La condition (C_3) est alors vérifiée. La proposition 2.2.6 nous permet alors de conclure. Mais nous nous intéressons ici au cas où a est simplement dans L^2. Nous ne pouvons donc espérer obtenir des majorations dans L^3. Cependant, ainsi que nous allons le voir, la proposition est encore vraie si on remplace la condition (C_3) par une condition (C_3') plus faible. En effet, reprenons le début de la démonstration de la proposition 2.2.4 (page 6). Nous écrivons cette fois la formule de Taylor-Lagrange, avec reste exact d'ordre 2, posons

$$A^{(a)}_{\varepsilon,t,x} = x - \varepsilon\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a\circ T^k \quad \text{et} \quad h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t} = \varepsilon \sum_{l=\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2}\right\rfloor+1}^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2}\right\rfloor} a\circ T^l.$$

Comme φ est à valeurs réelles, on a

$$\begin{aligned}\frac{u_\varepsilon(x,t+\tau)-u_\varepsilon(x,t)}{\tau} &= \frac{1}{\tau}\mathbf{E}_\mu\left[\varphi(A^{(a)}_{\varepsilon,t,x} - h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}) - \varphi(A^{(a)}_{\varepsilon,t,x})\right] \\ &= -\frac{1}{\tau}\mathbf{E}_\mu\left[\nabla\varphi(A^{(a)}_{\varepsilon,t,x}).h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}\right] + \frac{1}{2}\frac{1}{\tau}\mathbf{E}_\mu\left[\nabla^2\varphi(A^{(a)}_{\varepsilon,t,x} - \theta_{\varepsilon,\tau,t,x}h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}) : (h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t})^{\otimes 2}\right],\end{aligned}$$

où $\theta_{\varepsilon,\tau,t,x}$ désigne une fonction définie sur Ω et à valeurs dans $[0;1]$. La condition (C_3) de la proposition 2.2.4 peut donc être remplacée par la condition (C_3') suivante :

$$(C_3') \quad \lim_{\tau\to 0} \limsup_{\varepsilon\to 0} \sup_{(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d} \left|\mathbf{E}_\mu\left[C_{\varepsilon,\tau,t,x}\right]\right| = 0,$$

où $C_{\varepsilon,\tau,t,x}$ désigne l'erreur faite dans le développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$C_{\varepsilon,\tau,t,x} = \left(\nabla^2\varphi(A^{(a)}_{\varepsilon,t,x} - \theta_{\varepsilon,\tau,t,x} h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}) - \nabla^2\varphi(A^{(a)}_{\varepsilon,t,x})\right) : \left(\frac{h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right)^{\otimes 2}.$$

Proposition 4.2.4 *Si a est dans L^2, alors la condition (C_3') est satisfaite.*

Pour montrer ceci, nous utiliserons un théorème central limite pour les martingales. Au début des années 1960, P. Billingsley (cf [Bil61]) et I.A. Ibragimov (cf [Ibr63]) établissent simultanément le théorème central limite pour les martingales à accroissements stationnaires ergodiques dont l'énoncé figure ci-dessous. Dans [Bro71], Brown généralise ce résultat aux martingales vérifiant une condition de Lindeberg et un résultat de convergence portant sur les variances conditionnelles.

Théorème 4.2.5 (Billingsley, Ibragimov) *T étant ergodique, si b est une v.a.r de carré intégrable engendrant une suite de différences de martingale, alors la suite de v.a $\left(\frac{S_N(b)}{\sqrt{N}}\right)_{N\geq 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée de variance $\mathbf{E}_\mu[b^2]$.*

Nous aurons en fait besoin d'un conséquence de ce théoème : l'équi-intégrabilité de $\left(\left(\frac{S_N(b)}{\sqrt{N}}\right)^2\right)_{N\geq 1}$.

Preuve de la proposition 4.2.4. Soit $\alpha > 0$, on a

$$\mathbf{E}_\mu\left[C_{\varepsilon,\tau,t,x}\right] = \mathbf{E}_\mu\left[C_{\varepsilon,\tau,t,x}\mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right|_\infty > \alpha\right\}}\right] + \mathbf{E}_\mu\left[C_{\varepsilon,\tau,t,x}\mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right|_\infty \leq \alpha\right\}}\right].$$

Or, on a

$$\left|\mathbf{E}_\mu\left[C_{\varepsilon,\tau,t,x}\mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right|_\infty \leq \alpha\right\}}\right]\right| \leq \frac{d^3}{6}\|\nabla^3\varphi\|_\infty\sqrt{\tau}\alpha^3.$$

D'autre part,

$$\left|\mathbf{E}_\mu\left[C_{\varepsilon,\tau,t,x}\mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right|_\infty > \alpha\right\}}\right]\right| \leq 2d^2\|\nabla^2\varphi\|_\infty \mathbf{E}_\mu\left[\left|\left(\frac{h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right)^{\otimes 2}\right|_\infty \mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right|_\infty > \alpha\right\}}\right].$$

$$\leq \quad 2d^2\|\nabla^2\varphi\|_\infty \mathbf{E}_\mu \left[\left| \left(\frac{h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}} \right) \right|^2_\infty \mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{h^{(a)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}} \right|_\infty > \alpha \right\}} \right]$$

$$\leq \quad 2d^2\|\nabla^2\varphi\|_\infty \sum_{i=1}^{d} \mathbf{E}_\mu \left[\left(\frac{h^{(a_i)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}} \right)^2 \mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{h^{(a_i)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}} \right| > \alpha \right\}} \right].$$

Comme a est dans L^2 et engendre une suite de différences de martingale, il en est de même des a_i. Le théorème ergodique de Billingsley et Ibragimov (théorème 4.2.5) nous assure alors que

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_i \circ T^k \right)^2 \mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_i \circ T^k \right| \leq \alpha \right\}} \right] = \mathbf{E}_\mu \left[B^2_{(i)} \mathbf{1}_{\{|B_{(i)}| \leq \alpha\}} \right],$$

où $B_{(i)}$ désigne une v.a de loi normale centrée, de variance $\mathbf{E}_\mu[a_i^2]$. De plus, d'après la remarque 4.2.1, on a

$$\mathbf{E}_\mu \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_i \circ T^k \right)^2 \right] = \mathbf{E}_\mu \left[B^2_{(i)} \right].$$

On a donc

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_i \circ T^k \right)^2 \mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} a_i \circ T^k \right| > \alpha \right\}} \right] = \mathbf{E}_\mu \left[B^2_{(i)} \mathbf{1}_{\{|B_{(i)}| > \alpha\}} \right].$$

On montre, de manière analogue, que l'on a

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu \left[\left(\frac{1}{\sqrt{N \pm 1}} \sum_{k=0}^{N-1} a_i \circ T^k \right)^2 \mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{N\pm 1}} \sum_{k=0}^{N-1} a_i \circ T^k \right| > \alpha \right\}} \right] = \mathbf{E}_\mu \left[B^2_{(i)} \mathbf{1}_{\{|B_{(i)}| > \alpha\}} \right].$$

Nous sommes donc amenés à nous intéresser à la fonction $f_\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ définie par

$$f_\alpha(x) := x^2 \mathbf{1}_{\{|x|>\alpha\}}.$$

Or, pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\tau > 0$, on a, par stationnarité,

$$\frac{h^{(a_i)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \sum_{l=\left\lfloor \frac{t}{\varepsilon^2} \right\rfloor + 1}^{\left\lfloor \frac{t+\tau}{\varepsilon^2} \right\rfloor} a \circ T^l \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{\varepsilon}{\sqrt{\tau}} \sum_{k=0}^{N_{\varepsilon,t,t+\tau}-1} a_i \circ T^k.$$

Comme on a

$$\left| N_{\varepsilon,t,t+\tau} - \frac{\tau}{\varepsilon^2} \right| \leq 1$$

et comme $f(x) \leq f(y)$ pour tous réels x et y tels que $|x| \leq |y|$, la quantité

$$\mathbf{E}_\mu \left[f_\alpha \left(\frac{h^{(a_i)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}} \right) \right]$$

est comprise entre

$$\mathbf{E}_\mu\left[f_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\varepsilon,t,t+\tau}+1}}\sum_{k=0}^{N_{\varepsilon,t,t+\tau}-1} a_i\circ T^k\right)\right] \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_\mu\left[f_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\varepsilon,t,t+\tau}-1}}\sum_{k=0}^{N_{\varepsilon,t,t+\tau}-1} a_i\circ T^k\right)\right].$$

Donc, pour tout réels $t>0$ et $\tau>0$, on a

$$\sup_{t\in\mathbf{R}^+}\left|\mathbf{E}_\mu\left[f_\alpha\left(\frac{h^{(a_i)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right)\right]-\mathbf{E}_\mu\left[f_\alpha\left(B_{(i)}\right)\right]\right|\leq$$

$$\leq \sup_{N\geq\frac{\tau}{\varepsilon^2}-1}\max\left|\mathbf{E}_\mu\left[f_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{N\pm 1}}\sum_{k=0}^{N-1} a_i\circ T^k\right)\right]-\mathbf{E}_\mu\left[f_\alpha\left(B_{(i)}\right)\right]\right|.$$

Par conséquent, nous avons

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in\mathbf{R}^+}\left|\mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{h^{(a_i)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right)^2\mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{h^{(a_i)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right|>\alpha\right\}}\right]-\mathbf{E}_\mu\left[B^2_{(i)}\mathbf{1}_{\{|B_{(i)}|>\alpha\}}\right]\right|=0.$$

Soit $\beta>0$, il existe un réel $\alpha>0$, tel que, pour tout $i=1,...,d$, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{t\in\mathbf{R}^+}\mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{h^{(a_i)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right)^2\mathbf{1}_{\left\{\left|\frac{h^{(a_i)}_{\varepsilon,\tau,t}}{\sqrt{\tau}}\right|>\alpha\right\}}\right]\leq\beta,$$

d'où

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d}|\mathbf{E}_\mu[C_{\varepsilon,\tau,t,x}]|\leq\frac{d^3}{6}\|\nabla^3\varphi\|_\infty\sqrt{\tau}\alpha^3+2d^3\|\nabla^2\varphi\|_\infty\beta,$$

et donc

$$\limsup_{\tau\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d}|\mathbf{E}_\mu[C_{\varepsilon,\tau,t,x}]|\leq 2d^3\|\nabla^2\varphi\|_\infty\beta.$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $\beta>0$, on a encore

$$\limsup_{\tau\to 0}\limsup_{\varepsilon\to 0}\sup_{(t,x)\in\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d}|\mathbf{E}_\mu[C_{\varepsilon,\tau,t,x}]|=0,\ cqfd.$$

Ces résultats nous permettent détablir le théorème général suivant.

Théorème 4.2.6 *Soient $(\Omega,\mathcal{F},\mu,T)$ un système dynamique mesuré ergodique et a une v.a d-dimensionnelle dans L^2, centrée, engendrant une suite de DM. Si φ est dans $C^0_b(\mathbf{R}^d)$, alors, pour tout $\tau>0$ et tout compact K de $\mathbf{R}^d$, on a*

1. $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}_\mu[\psi_\varepsilon]=u$ *dans* $C([0;\tau]\times K)$,
2. $\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon=u$ *pour la topologie faible∗ sur* $L^\infty(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^d\times\Omega)$,

où u est l'unique solution de classe $C^{1,2}(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$ de l'équation de la chaleur

$$\frac{d}{dt}u = \frac{1}{2}\mathbf{E}_\mu[a^{\otimes 2}] : \nabla_x^2 u$$

avec condition initiale $u(0,\cdot) \equiv \varphi$.

Remarque 4.2.7 *Pour vérifier la condition (C_3'), on a eu recours au TCL ergodique de Billingsley-Ibragimov. Ce résultat étant rappelé, nous aurions pu directement conclure à l'aide du théorème C.*

Remarque 4.2.8 *D'autre part, d'après ce qui précède, dans la proposition 2.2.4, la condition (C_3) peut être remplacée par la condition (C_3'), qui est satisfaite si $\left(\left(\frac{S_N(b)}{\sqrt{N}}\right)^2\right)_{N\geq 1}$ est équi-intégrable.*

D'après la remarque 1.0.2, ce résultat est encore vrai pour toute fonction a homologue (dans L^2) à une fonction engendrant une suite de différences de martingales relativement à une filtration $\{\mathcal{F}_n = T^{-n}\mathcal{F}_0\}_n$. Nous avons donc montré le théorème B. Ainsi que le montre M.I. Gordin dans [Gor69], si $\{\mathcal{F}_n = T^{-n}\mathcal{F}_0\}_n$ est une filtration et si a est une v.a de carré intégrable, centrée et vérifiant

$$\sum_{m\geq 1} \|\mathbf{E}_\mu\left[a|\mathcal{F}_{-m}\right]\|_2 + \|a - \mathbf{E}_\mu\left[a|\mathcal{F}_m\right]\|_2 < +\infty,$$

alors a est homologue (dans L^2) à une fonction engendrant une suite de différences de martingales relativement à $\{\mathcal{F}_n\}$. Pour une référence générale sur les méthodes de martingales pour les théorèmes limites, on pourra se reporter au livre de P. Hall et C.C. Heyde [HH80]. Il s'agit à présent de vérifier ce critère. Dans sa thèse [Bor97], Stéphane Le Borgne montre que le critère introduit par M.I. Gordin est satisfait dans le cas d'un automorphisme ergodique T du tore $\mathbf{T}^n$, si $a : \mathbf{T}^n \to \mathbf{R}^d$ est de carré intégrable et telle qu'il existe $K > 0$ et $\beta > 2$ vérifiant

$$\sum_{\|k\|>b} |c_k(a)|^2 < K \ln^{-\beta}(b).$$

Or toute fonction a höldérienne d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$ vérifie ce critère (cf le livre de N. Bary [Bar64] pages 215 à 217 ou celui de Cl. Zuily et H. Queffélec [ZQ95] pages 96 et 97). Le théorème A s'étend donc à toute fonction a höldérienne d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$.

5 Cas d'un groupe abélien compact général

Pour les résultats classiques à propos de l'analyse de Fourier sur les groupes topologiques abéliens localement compacts, nous vous renvoyons aux livres de W. Rudin [Rud67], de H. Reiter [Rei] ou à celui de L. H. Loomis [Loo53].

Soient $\Omega = G$ un groupe topologique abélien compact, μ la mesure de Haar (normalisée) sur G et T un endomorphisme ergodique de G. Notons $\hat{G} = \{\gamma_n;\ n \in I\}$ le groupe dual de G formé des caractères continus de G ($\hat{G}$ est discret car G est compact). Il est connu que toute fonction $a \in L^2(G)$ est égale, dans $L^2(G)$, à la somme de sa série de Fourier :

$$a(x) = \sum_{n\in I} c_n(a)\gamma_n(x),$$

où $c_n(a)$ désigne le coefficient de Fourier de a en γ_n :

$$c_n(a) := \int_G a(x)\gamma_n(-x)\,d\mu(x).$$

Nous considérons l'application $S : I \to I$ définie par $\gamma_{Sn} = \gamma_n \circ T$.

Exemples 5.0.9 *$G = \mathbf{T}^n$ est un groupe abélien compact; la mesure μ de Haar sur $\mathbf{T}^n$ coïncide avec la mesure de lebesgue. $I := \mathbf{Z}^n$ et $\gamma_k := e^{2i\pi<k,\cdot>}$ conviennent. On a alors $S = {}^tT$.*

Le théorème suivant établi par V.P. Léonov dans [L6́0] généralise les TCL établis par R. Fortet [For40], M. Kac [Kac46] et M.P. Mineev [Min58] pour le cas du tore.

Théorème 5.0.10 *Soient G un groupe abélien compact de mesure de Haar μ et T un endomorphisme ergodique de G. Si $a \in L^2(G \to \mathbf{R})$ est une v.a. centrée et vérifie*

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\in I} |c_n(a)|.|c_{S^m n}(a)| < +\infty,$$

alors la limite suivante existe

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} a\circ T^k\right)^2\right] = \sigma^2 = \mathbf{E}_\mu[a^2] + 2\sum_{m\geq 1}\mathbf{E}_\mu[a.a\circ T^m]$$

et a vérifie le TCL :

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} a\circ T^k \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Ce résultat se généralise facilement au cas où a est une v.a. à valeurs dans $\mathbf{R}^d$. Pour cela, on utilise le fait qu'une suite de v.a. $(X_n)_n$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ converge en loi vers une v.a. X si et seulement si, pour tout vecteur α de $\mathbf{R}^d$, la suite de v.a.r $(<\alpha, X_n>)_n$ converge en loi vers $<\alpha, X>$. À l'aide du théorème C, nous en déduisons le théorème D suivant :

Théorème D *Soient G un groupe abélien compact de mesure de Haar μ et T un endomorphisme ergodique de G. Si $a \in L^2(G \to \mathbf{R}^d)$ est une v.a. centrée et vérifie*

$$\sum_{m\geq 0}\sum_{n\in I} |c_n(a)|_\infty.|c_{S^m n}(a)|_\infty < +\infty,$$

alors la limite suivante existe

$$\lim_{N\to+\infty} \mathbf{E}_\mu\left[\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k=0}^{N-1} a\circ T^k\right)^{\otimes 2}\right] = D(a) = \mathbf{E}_\mu[a^2] + \sum_{m\geq 1}\mathbf{E}_\mu[a\otimes a\circ T^m] + \sum_{m\geq 1}\mathbf{E}_\mu[a\circ T^m\otimes a]$$

et on a

- $\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}_\mu[\varphi(X_{\varepsilon,t,x})] = \mathbf{E}[\varphi(x - B_t)]$, *uniformément sur tout compact de $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d$,*

– $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(X_{\varepsilon,t,x}) = \mathbf{E}[\varphi(x - B_t)]$, *au sens de la topologie faible∗ sur* $L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \Omega)$*;*

où $(B_t)_t$ *désigne un mouvement brownien centré de matrice de variance* $D(a)$*.*

En particulier, dans le cas du tore $G = \mathbf{T}^n$, si T est un automorphisme ergodique de $\mathbf{T}^n$ et si a est höldérienne d'ordre α avec $0 < \alpha < 1$, il existe une constante $C > 0$ telle qu'on a

$$\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |c_k(a)|_\infty^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{R^\alpha}.$$

En reprenant la démonstration du théorème 3.2.1, on montre qu'on a alors, pour tout entier naturel $m \geq 0$,

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^n} |c_k(a)|_\infty.|c_{S^m k}(a)|_\infty \leq \tilde{C}\rho_0^{\frac{m\alpha}{2}},$$

pour une certaine constante $\tilde{C} > 0$ et avec $\rho(S_{|F_s}) < \rho_0 < 1$. Nous pouvons donc appliquer le théorème précédent. Ceci nous permet à nouveau de généraliser le théorème A à toute fonction höldérienne de rapport α, avec $0 < \alpha < 1$.

A Résultats sur les polynômes trigonométriques

Cette annexe est consacrée à l'interprétation, en terme de bernoullicité et de mélange, des propriétés d'orthogonalité de polynômes trigonométriques analogues à celle établie dans le théorème 3.2.4, dont le rôle est essentiel dans la démonstration proposée par C. Bardos, F.Golse et J-F. Colonna. Nous nous inspirons de l'article de Katznelson [Kat71] et reprenons des résultats présentés dans la thèse de Stéphane Le Borgne [Bor97].

A.1 Résultats sur les polynômes trigonométriques

Soit T un automorphisme du tore $\mathbf{T}^n$. Le degré d'un polynôme trigonométrique désignera le degré total pour $\|\cdot\|$. Nous étudions ici des propriétés de décorrélation pour les fonctions polynômes trigonométriques. La première est inspirée de l'article de Katznelson.

Propriété A.1.1 (Dec 0) *Pour toute fonction polynômiale f positive sur* $\mathbf{N}$ *et tout entier naturel p non nul, il existe un entier $K(f,p) > 0$ tel que, pour tout entier naturel N et tout entier $K \geq K(f,p)$, on a*

$$Cov\left(\prod_{k=K}^{K+N} P^{(k)} \circ T^{-k}, \prod_{l=K}^{K+f(K)} Q^{(l)} \circ T^l\right) = 0,$$

pour toutes suites de polynômes trigonométriques $(P^{(k)})_k$ et $(Q^{(l)})_l$ avec

$$deg(P^{(k)}) \leq k^p \quad et \quad deg(Q^{(l)}) \leq l^p.$$

Dans son article, Katznelson s'intéresse à la propriété **(K)** pour $f(X) = X^2 - X$. La deuxième propriété sur les polynômes est celle utilisée dans l'article de Bardos, Golse et Colonna :

Propriété A.1.2 (Dec) *Pour tout $R \geq 1$, il existe un entier $K(R) > 0$ tel que, pour tous entiers naturels M et N et tout entier $K \geq K(R)$, on a*

$$Cov\left(\prod_{k=K}^{K+N} P^{(k)} \circ T^{-k}, \prod_{l=K}^{K+M} Q^{(l)} \circ T^{l}\right) = 0,$$

pour toutes suites de polynômes trigonométriques $(P^{(k)})_k$ et $(Q^{(l)})_l$ de degré inférieur à R.

En nous inspirant de ces deux propriétés, nous définissons les deux propriétés suivantes; d'abord une forme faible (**(Decf)**), puis une forme renforcée (**(Decr)**).

Propriété A.1.3 (Decf) *Pour toute fonction polynômiale f positive sur $\mathbf{N}$ et tout $R \geq 1$, il existe un entier $K(R, f) > 0$ tel que, pour tout entier $K \geq K(R, f)$ et tout entier naturel N, on a*

$$Cov\left(\prod_{k=K}^{K+N} P^{(k)} \circ T^{-k}, \prod_{l=K}^{K+f(K)} Q^{(l)} \circ T^{l}\right) = 0,$$

pour toutes suites de polynômes trigonométriques $(P^{(k)})_k$ et $(Q^{(l)})_l$ de degré inférieur à R.

Cette propriété est celle que nous avons annoncée (dans le théorème 3.2.4) et utilisée afin de généraliser à tout automorphisme ergodique du tore le théorème établi dans [BGC].

Propriété A.1.4 (Decr) *Pour tout entier naturel p non nul, il existe un entier $K(p) > 0$ tel que, pour tous entiers naturels N et M et tout entier $K \geq K(p)$, on a*

$$Cov\left(\prod_{k=K}^{K+N} P^{(k)} \circ T^{-k}, \prod_{l=K}^{K+M} Q^{(l)} \circ T^{l}\right) = 0,$$

pour toutes suites de polynômes trigonométriques $(P^{(k)})_k$ et $(Q^{(l)})_l$ avec

$$deg(P^{(k)}) \leq k^p \quad et \quad deg(Q^{(l)}) \leq l^p.$$

Proposition A.1.5 *Nous avons les implications suivantes :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \text{ergodicité} & \rightarrow & \textbf{(Dec 0)} & & \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \searrow & \\
\text{hyperbolicité} & \rightarrow & \textbf{(Decr)} & & & & \textbf{(Decf)} \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & \textbf{(Dec)} & &
\end{array}.$$

De plus, dans le cas hyperbolique, on obtient, pour **(Dec)**,

$$K(R) = \left\lfloor \frac{\beta_0 \ln(R) + \beta_1}{2} \right\rfloor,$$

et, dans le cas ergodique, il existe $\tilde{\beta}_0(f)$ et $\tilde{\beta}_1(f)$ tels que

$$K(R,f) = \left[\tilde{\beta}_0(f)\ln(R) + \tilde{\beta}_1(f)\right]$$

convienne pour **(Decf)***.*

Preuve. Les implications entre les 4 propriétés sont claires. La proposition a été montrée pour la propriété **(Dec)** dans le théorème 3.2.2 . Nous allons nous inspirer de cette démonstration afin de montrer les autres implications. Notons, pour tous $\xi, \eta \in (\mathbf{Z}^n)^{\mathbf{N}}$,

1. Pour **(Dec 0)**,

$$X_\xi^-(K,N) = \sum_{k=K}^{K+N} S^{-k}\xi_k \quad \text{et} \quad X_\eta^+(K) = \sum_{k=K}^{K+f(K)} S^k \eta_k,$$

avec $\|\xi_k\| \le k^p$ et $\|\eta_l\| \le l^p$.

2. Pour **(Decf)**,

$$X_\xi^-(K,N) = \sum_{k=K}^{K+N} S^{-k}\xi_k \quad \text{et} \quad X_\eta^+(K) = \sum_{k=K}^{k+f(K)} S^k \eta_k,$$

avec $\|\xi_k\| \le R$ et $\|\eta_l\| \le R$.

3. Pour **(Decr)**,

$$X_\xi^-(K,N) = \sum_{k=K}^{K+N} S^{-k}\xi_k \quad \text{et} \quad X_\eta^+(K,M) = \sum_{k=K}^{K+M} S^k \eta_k,$$

avec $\|\xi_k\| \le k^p$ et $\|\eta_l\| \le l^p$.

Comme dans la preuve du théorème 3.2.2, il suffit de montrer que, pour K assez grand, on a

$$(P) \quad X_\xi^- + X_\eta^+ = 0 \quad \Rightarrow \quad X_\xi^- = X_\eta^+ = 0,$$

pour tous X_ξ^- et X_η^+ comme ci-dessus.

Soit T un automorphisme ergodique du tore, montrons que **(Dec 0)** est bien satisfaite. On a, en reprenant les notations introduites précédemment,

$$\begin{aligned}\left\|\left(X_\xi^-(K,N)\right)_u\right\| &\le \sum_{k=K}^{K+N} \|S^{-k}(\xi_k)_u\| \\ &\le \sum_{k\ge K} \|S_{|F_u}^{-k}\|.\|(\xi_k)_u\|.\end{aligned}$$

Or le rayon spectral de $S_{|F_u}^{-1}$, noté r_u, vérifie $r_u < 1$. Soit $r_0 \in]r_u;1[$. Si K est assez grand (si $K \ge \tilde{K}_0$, avec $\tilde{K}_0 \ge 1$), on a, pour tout $k \ge K$, $\|S_{|F_u}^{-k}\| \le r_0^k$ et donc

$$\left\|\left(X_\xi^-(K,N)\right)_u\right\| \le \sum_{k\ge K} k^p r_0^k,$$

pour tout entier naturel N. Nous définissons $V := F_s \oplus F_e$ et, pour tout x dans $\mathbf{R}^n$, nous notons $x_{s,e} = x_s + x_e$. On a

$$\left(S^{-K} X_\eta^+(K)\right)_{s,e} = \left(\sum_{l=0}^{f(K)} S^l \eta_{K+l}\right)_{s,e} = \sum_{l=0}^{f(K)} S^l (\eta_{K+l})_{s,e}.$$

Comme il existe une constante $C > 1$ telle que, pour tout entier $l \geq 1$, on a $\|S^l_{|V}\| \leq C l^n$ et comme $(F_e \oplus F_s) \cap \mathbf{Z}^n = \{0\}$, on a, si $X_\eta^+(K) \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 < \left\| \left(S^{-K} X_\eta^+(K)\right)_{s,e} \right\| &\leq K^p + C \sum_{l=1}^{f(K)} l^n (K+l)^p \\ &\leq (C+1).f(K).f(K)^n.(f(K)+K)^p \\ &\leq (C+1).(f(K)+K)^{n+p+1}. \end{aligned}$$

Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que l'on a, pour tout entier $K \geq \tilde{K}_0$,

$$\left\| \left(S^{-K} X_\eta^+(K)\right)_u \right\| \geq C_1.(f(K)+K)^{-n(n+p+1)}.$$

En effet, soit une constante $\tilde{C} > 0$; si K est un entier supérieur ou égal à $\tilde{K}_0$ vérifiant

$$\left\| \left(S^{-K} X_\eta^+(K)\right)_u \right\| < \tilde{C}.(f(K)+K)^{-n(n+p+1)},$$

alors on a

$$\begin{aligned} \left\| S^{-K} X_\eta^+(K) \right\| &\leq (C+1).(f(K)+K)^{n+p+1} + \tilde{C}.(f(K)+K)^{-n(n+p+1)} \\ &\leq (\tilde{C}+C+1).(f(K)+K)^{n+p+1}, \end{aligned}$$

et donc, d'après le théorème 3.1.2, on a

$$\left\| \left(S^{-K} X_\eta^+(K)\right)_u \right\| \geq \frac{K_{(e,s)}}{\|S^{-K} X_\eta^+(K)\|^{m_s+m_e}} \geq \frac{K_{(e,s)}}{(\tilde{C}+C+1)^n}.(f(K)+K)^{-n(n+p+1)}.$$

Ainsi $C_1 = \min(\tilde{C}, \frac{K_{(e,s)}}{(\tilde{C}+C+1)^n})$ convient. Nous avons donc, pour K assez grand,

$$\left\| \left(X_\eta^+(K)\right)_u \right\| \geq r_0^{-K} \left\| \left(S^{-K} X_\eta^+(K)\right)_u \right\| \geq C_1.r_0^{-K} (f(K)+K)^{-n(n+p+1)}.$$

Par conséquent, pour K assez grand, on a, pour tous η, ξ dans $(\mathbf{Z}^n)^{\mathbf{N}}$ et tout entier naturel N,

$$\left\| \left(X_\eta^+(K)\right)_u \right\| > \left\| \left(X_\xi^-(K,N)\right)_u \right\|.$$

Pour **(Decf)**, on trouve (de même que pour **(Dec 0)**), pour K assez grand (si $K \geq K_0$, avec $K_0 \geq 1$) et pour tout entier naturel N,

$$\left\| \left(X_\xi^-(K,N)\right)_u \right\| \leq R \sum_{k \geq K} r_0^k = R \frac{r_0^K}{1-r_0}$$

et, si $X_\eta^+(K) \neq 0$,

$$0 < \left\| \left(S^{-K} X_\eta^+(K) \right)_{s,e} \right\| \leq R + CR \sum_{l=1}^{f(K)} l^n \leq (C+1)R.(f(K)+K)^{n+1}.$$

Il existe donc une constante $C_1 > 0$ telle que, pour K assez grand ($K \geq K_1(f)$), on a

$$\left\| \left(X_\eta^+(K) \right)_u \right\| > C_1.r_0^{-K}.R^{-n}(f(K)+K)^{-n(n+1)}.$$

Il existe $K_2(f)$ telle que $(f(K)+K)^{n(n+1)} < r_0^{-K}$, pour tout entier $K \geq K_2(f)$. Posons

$$\tilde{\beta}_0(f) = -\frac{n+1}{\ln(r_0)} \quad \text{et} \quad \tilde{\beta}_1(f) = \max\left(\frac{\ln(C_1(1-r_0))}{\ln(r_0)}; K_0; K_1(f); K_2(f) \right).$$

Pour $K \geq \tilde{\beta}_0(f)\ln(R) + \tilde{\beta}_1(f)$, on a

$$r_0^{2K}(f(K)+K)^{n(n+1)} < r_0^K \leq C_1(1-r_0)R^{-(n+1)},$$

et donc $R\frac{r_0^K}{1-r_0} < C_1.r_0^{-K}.R^{-n}(f(K)+K)^{-n(n+1)}$.

Soit T un automorphisme hyperbolique du tore, montrons que **(Decr)** est bien satisfaite. On a

$$\left\| \left(X_\xi^-(K,N) \right)_u \right\| \leq \sum_{k \geq K} k^p r_0^k < \frac{1}{2} \min\left\{ \|\gamma\| : \gamma \in \mathbf{Z}^n,\ \gamma \neq 0 \right\},$$

pour K assez grand. De même, on obtient

$$\left\| \left(X_\eta^+(K,M) \right)_s \right\| < \frac{1}{2} \min\left\{ \|\gamma\| : \gamma \in \mathbf{Z}^n,\ \gamma \neq 0 \right\},$$

pour K assez grand. Ainsi, si K est assez grand, nous avons bien la propriété (P) (car ici $\mathbf{R}^n = F_s \oplus F_u$), *cqfd.*

Remarque A.1.6 *Dans le cas hyperbolique, on obtient même plus: Soient α et β vérifiant $1 < \alpha < \frac{1}{\rho\left(S_{|F_u}^{-1}\right)}$ et $1 < \beta < \frac{1}{\rho\left(S_{|F_s}\right)}$, il existe un entier naturel $K(\alpha,\beta)$ tel que, pour tous entiers naturels $K \geq K(\alpha,\beta)$, N et M, on a*

$$Cov\left(\prod_{k=K}^{K+N} P^{(k)} \circ T^{-k}, \prod_{k=K}^{K+M} Q^{(l)} \circ T^l \right) = 0,$$

pour toutes suites de polynômes trigonométriques $(P^{(k)})_k$ et $(Q^{(l)})_l$ avec

$$deg(P^{(k)}) \leq \alpha^k \quad et \quad deg(Q^{(l)}) \leq \beta^l.$$

Nous allons à présent nous intéresser à des résultats de Bernoullicité et de mélange.

A.2 Bernoullicité faible

A.2.1 Cas général

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace probabilisé.

Définition A.2.1 *Deux partitions mesurables finies $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ sont dites $\varepsilon-$indépendantes (avec $\varepsilon > 0$) si*

$$\sum_{A\in\mathcal{A},\ B\in\mathcal{B}} |\mu(A\cap B) - \mu(A)\mu(B)| < \varepsilon.$$

Le lemme suivant est emprunté à Katznelson [Kat71].

Lemme A.2.2 *Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux partitions mesurables finies de $(\Omega, \mathcal{F})$ et soit un réel $\varepsilon \in]0, 1[$; s'il existe $E \subset \Omega$ tel que $\mu(E) \leq \varepsilon^2$, et des familles de v.a positives $\{\varphi_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ et $\{\psi_B\}_{B\in\mathcal{B}}$ définies sur Ω telles que, pour tous $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$, on ait*

1. $\varphi_A(t) \geq 1,\ \forall t \in A\cap E^c$ *et* $\psi_B(t) \geq 1,\ \forall t \in B \cap E^c$,
2. $\sum_{A\in\mathcal{A}} \mathbf{E}_\mu [\varphi_A] < 1 + \varepsilon^2$ *et* $\sum_{B\in\mathcal{B}} \mathbf{E}_\mu [\psi_B] < 1 + \varepsilon^2$,
3. $Cov(\varphi_A, \psi_B) = 0$,

alors $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont $h(\varepsilon)$-indépendantes avec

$$h(\varepsilon) = 22\varepsilon + 8\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \sim_{\varepsilon\to 0} 30\varepsilon.$$

Nous munissons à présent $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ d'une transformation T préservant la mesure μ. Pour toute partition mesurable finie $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$, pour tous entiers K et M avec $K \leq M$, nous notons $\bigvee_{m=K}^{M} T^m\mathcal{P}$ la partition finie dont les éléments sont de la forme

$$A_j = \bigcap_{m=K}^{M} T^m P_{j_m}, \quad j = (j_K, \ldots, j_M) \in \{1, \ldots, s\}^{\{K,\ldots,M\}},$$

et $\mathcal{F}_K^M$ la tribu engendrée par cette partition. Les éléments de cette tribus sont les réunions (que l'on peut supposer disjointes) d'éléments de la partition $\bigvee_{m=K}^{M} T^m\mathcal{P}$. Nous définissons également, pour tout entier K, les tribus $\mathcal{F}_K^{+\infty}$ et $\mathcal{F}_{-\infty}^K$ engendrées par les suites de tribus croissantes respectives $\left(\mathcal{F}_K^{K+M}\right)_{M\geq 0}$ et $\left(\mathcal{F}_{K-N}^{K}\right)_{N\geq 0}$.

Définition A.2.3 *On dit qu'une partition mesurable finie $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ de $(\Omega, \mathcal{F})$ vérifie la propriété de*

1. **Bernoullicité faible** *si*

$$\lim_{K\to+\infty} \sup_{M,N} \sum_{A\in\bigvee_{m=K}^{K+M} T^m\mathcal{P}, B\in\bigvee_{l=K}^{K+N} T^{-l}\mathcal{P}} |\mu(A\cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0,$$

i.e si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout entier naturel $K \geq K_0(\varepsilon)$ et tous entiers naturels M et N, les partitions $\bigvee_{m=K}^{K+M} T^m\mathcal{P}$ et $\bigvee_{l=K}^{K+N} T^{-l}\mathcal{P}$ soient ε-indépendantes. On dit également que $\mathcal{P}$ est **faiblement de Bernoulli**.

2. **presque Bernoullicité faible** *si pour toute fonction polynômiale f (non constante) à coefficients dans* $\mathbf{N}$*, on a*

$$\lim_{K\to+\infty}\sup_M \sum_{A\in\bigvee_{m=K}^{K+M} T^m\mathcal{P},B\in\bigvee_{l=K}^{f(K)} T^{-l}\mathcal{P}} |\mu(A\cap B)-\mu(A)\mu(B)| = 0.$$

A.2.2 Cas des automorphismes du tore

Dans ce paragraphe, on prend $\Omega = \mathbf{T}^n$ et on considère un automorphisme T du tore $\mathbf{T}^n$. Soit un réel $r > 1$.

Définition A.2.4 *Une partition mesurable finie $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ du tore $\mathbf{T}^n$ est dite* **r-bonne** *si il existe un entier $p > 0$ tel que, pour tout m, il existe un ensemble mesurable E_m et des polynômes trigonométriques $f_{m,P}$ (P décrivant $\mathcal{P}$) tels que l'on ait*

1. $\mu(E_m) \le \frac{1}{m^r}$,
2. $f_{m,P} \ge 0$,
3. $deg(f_{m,P}) \le m^p$,
4. $\sum_{P\in\mathcal{P}} f_{m,P}(t) \le 1 + \frac{1}{m^r}$,
5. $f_{m,P}(t) \ge 1$, *pour tout* $t \in P \cap E_m^c$,
6. $f_{m,P}(t) \le \frac{1}{m^r}$, *pour tout* $t \in (P \cup E_m)^c$.

Alors, les indicatrices des atomes de la partitions peuvent être approchées par des polynômes trigonométriques. Généralisant le théorème 1 de l'article de Katznelson [Kat71] (page 190), nous avons les deux résultats suivants dont les démonstrations sont similaires. Nous ne montrons ici que le second.

Proposition A.2.5 *Si la propriété* **(Dec 0)** *est vérifiée, toute partition $\mathcal{P}$ r-bonne vérifie la propriété de presque Bernoullicité faible.*

Proposition A.2.6 *Si la propriété* **(Decr)** *est vérifiée, toute partition $\mathcal{P}$ r-bonne vérifie la propriété de Bernoullicité faible.*

Preuve de la proposition A.2.6. Nous allons appliquer le lemme A.2.2 à $\bigvee_{k=K}^{K+M} T^k\mathcal{P}$ et $\bigvee_{l=K}^{K+N} T^{-l}\mathcal{P}$. Soient

$$i \in I = \{1,\ldots,s\}^{\{K,\ldots,K+M\}} \quad \text{et} \quad j \in J = \{1,\ldots,s\}^{\{K,\ldots,K+N\}},$$

nous notons

$$A_i = \bigcap_{k=K}^{K+M} T^k P_{i_k} \quad \text{et} \quad B_j = \bigcap_{l=K}^{K+N} T^{-l} P_{j_l}.$$

On a

$$\bigvee_{k=K}^{K+M} T^k\mathcal{P} = \{A_i; i\in I\} \quad \text{et} \quad \bigvee_{l=K}^{K+N} T^{-l}\mathcal{P} = \{B_j; j\in J\}.$$

On approche $\mathbf{1}_{A_i}$ et $\mathbf{1}_{B_j}$ par les polynômes trigonométriques respectifs φ_{A_i} et ψ_{B_j} définis par

$$\varphi_{A_i} = \prod_{k=K}^{K+M} f_{k,P_{i_k}} \circ T^{-k} \quad \text{et} \quad \psi_{B_j} = \prod_{l=K}^{K+N} f_{l,P_{j_l}} \circ T^{l}.$$

On a

. $\varphi_{A_i} \geq 0$ et $\psi_{B_j} \geq 0$,

. $\varphi_{A_i}(s) \geq 1,\ \ \forall s \in A_i \cap E^c$ et $\psi_{B_j} \geq 1\ \ \forall t \in B_j \cap E^c$,

avec $E = \left(\bigcup_{k=K}^{K+M} T^k E_k\right) \cup \left(\bigcup_{l=K}^{K+N} T^{-l} E_l\right)$.

. $\mu(E) \leq 2 \sum_{k \geq K} \frac{1}{k^r} \leq 2 \int_{K-1}^{+\infty} \frac{1}{x^r}\, dx = \frac{2}{(r-1)(K-1)^{r-1}} \leq \varepsilon^2$, pour $K \geq K_1(\varepsilon)$.

. $\sum_{i \in I} \mathbf{E}_\mu \left[\varphi_{A_i}\right] \leq 1 + \varepsilon^2$ et $\sum_{j \in J} \mathbf{E}_\mu \left[\psi_{B_j}\right] \leq 1 + \varepsilon^2$, pour $K \geq K_1(\varepsilon)$. En effet

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} \mathbf{E}_\mu \left[\varphi_{A_i}\right] &= \mathbf{E}_\mu \left[\sum_{i \in \{1,\ldots,s\}^{\{K,\ldots,K+M\}}} \prod_{k=K}^{K+M} f_{k,P_{i_k}} \circ T^{-k} \right] \\
&= \mathbf{E}_\mu \left[\prod_{k=K}^{K+M} \left(\sum_{i=1}^{s} f_{k,P_i} \circ T^{-k} \right) \right] \\
&\leq \prod_{k=K}^{K+M} \left(1 + \frac{1}{k^r}\right) \\
&\leq \prod_{k \geq K} \left(1 + \frac{1}{k^r}\right).
\end{aligned}$$

De même, on obtient $\sum_{j \in J} \mathbf{E}_\mu \left[\psi_{B_j}\right] \leq \prod_{k \geq K} \left(1 + \frac{1}{k^r}\right)$.

Posons $P^{(k)} = f_{k,P_{i_k}}$ et $Q^{(l)} = f_{l,P_{j_l}}$, pour tout $k = K, \ldots, K+M$ et tout $l = K, \ldots, K+N$. On a $deg(P^{(k)}) \leq k^p$ et $deg(Q^{(l)}) \leq l^p$. Donc (par **(Decr)**), si $K \geq K(p)$, on a

$$Cov(\varphi_{A_i}, \psi_{B_j}) = 0.$$

Ainsi, pour $K \geq K_0(\varepsilon, p) := max(K_1(\varepsilon), K(p))$, nous pouvons appliquer le lemme A.2.2. Les partitions $\bigvee_{k=K}^{K+M} T^k \mathcal{P}$ et $\bigvee_{l=K}^{K+N} T^{-l} \mathcal{P}$ sont donc $h(\varepsilon)$-indépendantes, *cqfd.*

Remarque A.2.7 *La démonstration de cette dernière proposition nous donne, de plus*

$$\sup_{M,N} \sum_{A \in \bigvee_{m=K}^{K+M} T^m \mathcal{P},\, B \in \bigvee_{l=K}^{K+N} T^{-l} \mathcal{P}} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leq C K^{-\frac{r-1}{2}},$$

pour K assez grand (en prenant $\varepsilon^2 = \frac{2}{(r-1)(K-1)^{r-1}}$). La vitesse de décroissance vers 0 est donc au moins polynômiale. À l'aide de la remarque A.1.6, on montre en fait que, si T est hyperbolique, alors la vitesse de décroissance est exponentielle (en reprenant la démonstration avec $m = \lfloor \gamma^k \rfloor$ à la place de $m = k$, et $1 < \gamma < min\left(\frac{1}{\rho\left(S_{|F_u}^{-1}\right)}, \frac{1}{\rho\left(S_{|F_s}\right)}\right)$).

A.3 α-mélange

Définition A.3.1 *Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux sous-tribus sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, leur* **coefficient d'$\alpha$-mélange** *est*

$$\alpha(\mathcal{G}, \mathcal{H}) := \sup_{G \in \mathcal{G},\ H \in \mathcal{H}} |\mu(G \cap H) - \mu(G)\mu(H)|.$$

La proposition suivante nous donne une majoration de type Hölder faisant intervenir le coefficient d'α-mélange. Elle figure dans l'annexe du livre de Hall et Heyde [HH80].

Proposition A.3.2 *Soit $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ comme dans la définition A.3.1. Pour tous p et q dans $]1; +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ et pour toutes fonctions $g \in L^p(\mathcal{G})$ et $h \in L^q(\mathcal{H})$, on a*

$$|Cov(g,h)| \leq 8\|g\|_p \|h\|_q \left(\alpha(\mathcal{G}, \mathcal{H})\right)^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Proposition A.3.3 *Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des partitions mesurables finies ε-indépendantes d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, alors les tribus $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ engendrées par ces partitions ont un coefficient d'α-mélange $\alpha(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ majoré par ε.*

Définition A.3.4 *Une partition mesurable finie $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ est dite* **α-mélangeante** *si*

$$\alpha(K) := \sup_{A \in \mathcal{F}_K^{+\infty}, B \in \mathcal{F}_{-\infty}^0} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \longrightarrow_{K \to +\infty} 0.$$

$\alpha(K)$ est appelé le coefficient d'α-mélange d'ordre K de $\mathcal{P}$.

Proposition A.3.5 *On a*

$$\alpha(K) = \sup_{N,L} \sup_{A \in \mathcal{F}_K^{K+L}, B \in \mathcal{F}_{-N}^0} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)|.$$

Remarque A.3.6 *La proposition A.3.3 nous montre en particulier que la propriété de faible bernoullicité implique celle d'α-mélange.*

Ainsi,

Théorème A.3.7 *Soit T un automorphisme du tore $\mathbf{T}^n$ vérifiant la propriété* **(Decr)***, alors toute partition r-bonne est α-mélangeante.*

Remarque A.3.8 *Dans le cas d'un automorphisme quasi-hyperbolique du tore $\mathbf{T}^n$, pour toute partition r-bonne dont les éléments sont de diamètre assez petit, la propriété d'α-mélange n'est pas vérifiée ainsi que le montre Stéphane Le Borgne dans [Bor97] en s'inspirant d'un résultat dû à D.A. Lind (cf [Lin82]); donc la propriété* **(Decr)** *n'est pas satisfaite.*

Pour conclure cette annexe, résumons les résultats obtenus.

1. Si T est un automorphisme ergodique du tore $\mathbf{T}^n$, alors les propriétés **(Dec 0)** et **(Decf)** sont satisfaites. Il en résulte que toute partition r-bonne possède la propriété de presque Bernoullicité faible et que le TCL de Bardos, Golse et Colonna est vérifié (nous avons vu dans le paragraphe 3 que la propriété **(Decf)** avec $K(R, f) = \left[\tilde{\beta}_0(f)\ln(R) + \tilde{\beta}_1(f)\right]$ est suffisante pour utiliser la méthode de l'article).

2. Si T est un automorphisme hyperbolique du tore $\mathbf{T}^n$, alors les quatre propriétés introduites en début d'annexe sont satisfaites. Il en résulte que toute partition r-bonne possède la propriété de Bernoullicité faible, donc est α-mélangeante. De plus, le coefficient d'α-mélange converge exponentiellement vite vers 0 (d'après la remarque A.2.7 et la proposition A.3.5).

3. Si T est un automorphisme quasi-hyperbolique, alors on peut trouver une partition r-bonne non α-mélangeante, donc la propriété **(Decr)** ne peut être vérifiée. Une question reste cependant posée : qu'en est-il de la propriété **(Dec)**?

Références

[Bar64] N. Bary. *A treatise on trigonometric series*, volume 1. Pergamon press, 1964.

[BGC] Claude Bardos, François Golse, and Jean-François Colonna. *Diffusion Approximation induced on a Kinetic Equation by Automorphisms of the Torus.* Université de Paris VII et CMLA ENS CACHAN; Université de Paris VII; LACTAMME, École polytechnique et CNET.

[BGC96] Claude Bardos, François Golse, and Jean-François Colonna. *Diffusion Approximation and Hyperbolic Automorphisms of the 2-Torus.* Physica D, 1996.

[Bil61] P. Billingsley. The lindeberg-lévy theorem for martingales. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12:788–792, 1961.

[Bor97] Stéphane Le Borgne. *Dynamique symbolique et propriétés stochastiques des automorphismes du tore : cas hyperbolique et quasi-hyperbolique.* Thèse à l'Université de Rennes I, 1997.

[Bro71] B.M. Brown. Martingale central limite theorems. *The Annals of Mathematical Statistics*, 42:59–66, 1971.

[For40] R. Fortet. Sur une suite également répartie. *Studia Math.*, 9:54–70, 1940.

[Gor69] M.I. Gordin. The central limit theorem for stationary processes. *Soviet Math. Dokl.*, 10:1174–1176, 1969.

[HH80] P. Hall and C.C. Heyde. *Martingale Limit Theory and its Applications.* Academic Press, 1980.

[Ibr63] I.A. Ibragimov. A central limit theorem for a class of dependent random variables. *Theory Probab. Appl.*, 8:83–89, 1963.

[Kac46] M. Kac. On the distribution of values of sums of the type $< f >$. *Ann. of Math.*, 2:33–49, 1946.

[Kat71] Y. Katznelson. Ergodic automorphisms of $\mathbf{T}^n$ are bernoulli shifts. *Israel J. Math.*, 10:186–195, 1971.

[L´60] V. P. Léonov. Central limit theorem for ergodic endomorphisms of compact commutative groups. *Dokl. Acad. Sci., USSR*, 135:258–261, 1960.

[Lin82] D.A. Lind. Dynamical properties of quasi hyperbolic toral automorphisms. *Ergodic Theory Dynamical Systems*, 2:49–68, 1982.

[Léo64] Léonov. *Quelques exemples de processus fortement mélangeants.* Moscou, 1964.

[Loo53] L. H. Loomis. *An introduction to abstract harmonic analysis.* Van Nostrand, Toronto, 1953.

[Min58] M. P. Mineev. Eine diophantische gleichung mit einer exponentialfunktion und ihre andwendung zur untersuchung einer ergodischen summe. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Ser. mat. 22:585–598, 1958.

[Rei] Hans Reiter. *Classical analysis and locally compact groups.* Oxford mathematical monograph.

[Rud67] Walter Rudin. *Fourier Analysis on groups.* Interscience publishers, 1967.

[ZQ95] Cl. Zuily and H. Queffélec. *Éléments d'analyse pour l'agrégation.* Masson, 1995.

Index