Une remarque sur l'équation de cobord

Stéphane Le Borgne

IRMAR, Université de Rennes I, 35042 Rennes Cedex

I Rappels

On dit qu'une fonction f définie sur un système dynamique (X, T, m) est un cobord s'il existe une fonction h mesurable telle que

$$f = h - Th. \tag{$*$}$$

Les cobords ont vis à vis de la dynamique T un statut particulier. Par exemple, si h est continue dans (*), la somme des valeurs de f le long d'une orbite périodique quelconque de T est nulle. Dans de nombreux cas cette propriété est une caractérisation des cobords réguliers ([Liv71],[Vee86],[KK96]).

Nous nous intéressons ici à un problème légèrement différent. Dans (*) lorsque f est régulière que peut-on dire de la régularité de h? Soit h une fonction mesurable telle que $h - Th$ soit régulière. Peut-on trouver dans la classe de h une fonction continue h' telle que $h - Th = h' - Th'$?

Nous montrons comment on peut traiter ce problème sur deux exemples : les automorphismes ergodiques des tores et l'application au temps 1 associée au flot géodésique sur une surface compacte de courbure -1.

Rappelons le théorème suivant.

Théorème I.1 *Soient $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ un sytème dynamique inversible, $\mathcal{A}$ une sous-tribu de $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{A} \subset T\mathcal{A}$ et f une fonction dans $L^2(\mu)$ telle que*

$$\sum_{n>0} ||E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n<0} ||f - E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty,$$

où $\mathcal{A}_n = T^{-n}\mathcal{A}$. Alors, il existe deux fonctions g et h dans $L^2(\mu)$, telles que g engendrent une suite de différences de martingale et $f = g + h - Th$. Si g n'est pas nulle presque partout la suite $n^{-1/2}(S_n(f) - n\mu(f))$ converge en loi vers une variable gaussienne non dégénérée.

Pour les deux exemples considérés on a construit dans [LBre] et [CLB98] une filtration $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la tribu borélienne telle que si f appartient à une classe $\mathcal{R}$ de fonctions régulières on ait :

$$\sum_{n>0} ||E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n<0} ||f - E(f|\mathcal{A}_n)||_2 < \infty.$$

Dans le cas des automorphismes des tores on peut prendre pour $\mathcal{R}$ la classe des fonctions $f \in L^2\left(\mathbb{T}^d\right)$ de série de Fourier

$$f(\cdot) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k \exp(2i\pi\langle k, \cdot\rangle)$$

telle qu'il exsite $R > 0$ et $\theta > 2$ tels que, pour tout $b > 0$,

$$\sum_{||k||>b} |c_k|^2 < R\log^{-\theta}(b).$$

Dans le cas de l'application au temps 1 du flot géodésique on peut prendre pour $\mathcal{R}$ la classe des fonctions höldérienne.

Si une fonction f appartenant à $\mathcal{R}$ est un cobord mesurable alors $n^{-1/2}S_n(f)$ converge en probabilité vers 0. Le théorème précédent montre alors l'existence d'une fonction h de carré intégrable telle que $f = h - Th$ (sinon $n^{-1/2}S_n(f)$ converge en loi vers une variable gaussienne non dégénérée).

Cette information étant acquise, l'analyse de Fourier pour le premier exemple, le théorème de Birkhoff pour le second permettent d'étudier plus précisément la régularité de h.

II Exemple 1

Soit M une matrice carrée de taille d et de déterminant ± 1.

Cette matrice définit un automorphisme du tore de dimension d,

$$T : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d \ : \ x \longmapsto Mx \bmod 1.$$

Cet automorphisme laisse invariante la mesure de Lebesgue m.

Le système dynamique $\left(\mathbb{T}^d, T, m\right)$ est ergodique si et seulement si M n'a pas de valeur propre racine de l'unité.

Livshits a montré dans [Liv71], pour un automorphisme hyperbolique, que si f une fonction höldérienne et de série de Fourier absolument convergente est un cobord dans $L^1(m)$ alors c'est un cobord dans l'ensemble des fonctions continues. Pour un automorphisme ergodique non nécessairement hyperbolique, en utilisant la remarque 3 de [Liv71], un résultat de Veech (corollaire 5.14 dans [Vee86], on peut énoncer la proposition suivante.

Proposition II.1 *Soit f une fonction d fois différentiable de dérivée dième höldérienne. Si f est un cobord mesurable alors c'est un cobord dans l'ensemble des fonctions höldériennes.*

Il suffit de remarquer que sous ces hypothèses, d'après ce qui précède, si f est un cobord mesurable alors f est un cobord dans $L^2(\mathbb{T}^d)$. On peut ensuite appliquer les résultats de Veech et Livshits. Nous donnons ci-dessous une autre preuve n'utilisant pas ces résultats. Elle repose sur les deux lemmes suivants. On trouvera une preuve du premier dans l'article de Katznelson [Kat71] ou dans le livre de Leonov [Leo64].

Lemme II.2 *Soit M une matrice carrée $d \times d$ à coefficients entiers. Soient V et V_1 deux sous-espaces M-stables de $\mathbb{R}^d$ tels que $\mathbb{R}^d = V \bigoplus V_1$ et les restrictions de M à V et V_1 n'ont pas de racines communes. Si $V \cap \mathbb{Z}^d = 0$, alors il existe une constante $K > 0$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, on ait*

$$d(k, V) \geq K||k||^{-q},$$

où q désigne la dimension de V.

Lemme II.3 *Soient f et h dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et c_k et d_k leurs coefficients de Fourier. Supposons que f et h soient liées par la relation : $f = h - Th$. S'il existe $K > 0$ et $l > 0$ tel que*

$$|c_k| \leq K \; ||k||^{-l},$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe K' tel que

$$|d_k| \leq K' \; ||k||^{\epsilon - l}.$$

Preuve. Soit k un élément non nul de $\mathbb{Z}^d$. On montre aisément que l'on a

$$f = h - Th = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (d_k - d_{{}^tM^{-1}k}) \exp(2i\pi\langle k, \cdot\rangle) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} (d_{{}^tMk} - d_k) \exp(2i\pi\langle {}^tMk, \cdot\rangle).$$

Donc, comme $|d_{{}^tM^jk}|$ tend vers zéro lorsque $|j|$ tend vers l'infini, on a

$$d_k = \sum_{j=0}^{\infty} c_{{}^tM^{-j}k} = -\sum_{j=1}^{\infty} c_{{}^tM^jk}.$$

Soit F'_u (resp. F'_s, resp. F'_e) le sous-espace vectoriel ${}^tM$-stable associé aux valeurs propres de module plus grand que (resp. plus petit que, resp. égal à) 1. Pour $a = e, u, s$, notons π_a la projection sur F'_a parallèlement à la somme des deux autres F'_b.

Il existe $a \in \{e, u, s\}$ tel que $||\pi_a k|| \geq ||k||/3$.

Si $||\pi_u k|| \geq ||k||/3$ alors il existe $R_0 > 0$ et $\alpha > 1$ tel que l'on ait

$$||{}^tM^jk|| \geq ||{}^tM^j\pi_u k|| \geq R_0\alpha^j||\pi_u k|| \geq \frac{R_0\alpha^j||k||}{3}.$$

En utilisant les relations $d_k = -\sum_{j=1}^{\infty} c_{{}^tM^jk}$ and $|c_k| \leq K\ ||k||^{-l}$, nous obtenons

$$|d_k| \leq K3^lR_0^{-l}\frac{\alpha^{-l}}{1-\alpha^{-l}}||k||^{-l}.$$

Si $||\pi_s k|| \geq ||k||/3$ alors, grâce à l'égalité $d_k = \sum_{j=0}^{\infty} c_{{}^tM^{-j}k}$, nous obtenons un résultat similaire.
Si $||\pi_e k|| \geq ||k||/3$ alors, d'une part nous avons

$$||{}^tM^jk|| \geq ||{}^tM^j\pi_e k|| \geq \frac{R_1||\pi_e k||}{j^d} \geq \frac{R_1||k||}{3j^d}$$

pour un $R_1 > 0$ (car la restriction de ${}^tM$ à F_e n'a que des valeurs propres de module 1). D'autre part, le lemme permet d'affirmer l'existence d'un nombre $R_2 > 0$ tel que

$$||{}^tM^jk|| \geq ||{}^tM^j\pi_u k|| \geq R_0\alpha^j||\pi_u k|| \geq R_0\alpha^jR_2||k||^{-d}.$$

Il existe $A > 0$ et un entier $j(k) \leq A\log||k||$ tel que, pour j plus grand que $j(k)$, on a

$$R_0\alpha^jR_2||k||^{-d} \geq \alpha^{j/2}||k||.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
|d_k| &= |\sum_{j=1}^{j(k)} c_{{}^tM^jk} + \sum_{j=j(k)+1}^{\infty} c_{{}^tM^jk}| \\
&\leq Kj(k)\left(\frac{R_1||k||}{3j(k)^d}\right)^{-l} + K\frac{\alpha^{-l/2}}{1-\alpha^{-l/2}}||k||^{-l} \\
&\leq R_3(\log||k||)^{ld+1}\ ||k||^{-l},
\end{aligned}$$

pour $R_3 > 0$ suffisamment grand. Le résultat est maintenant clair. $\square$

Si la fonction f vérifie les hypothèses de la proposition alors il existe $K > 0$ et α tel que

$$|c_k| \leq K \ ||k||^{-d-\alpha}.$$

Le lemme montre alors que si $f = h - Th$ est un cobord dans L^2 alors il existe $K' > 0$ et $\beta > 0$ tels que les coefficients de Fourier de h vérifient l'inégalité

$$|d_k| \leq K' \ ||k||^{-d-\beta}.$$

On vérifie aisément que ceci entraîne que h est égale presque partout à une fonction höldérienne.

III Exemple 2

Une surface compacte de courbure constante S est le quotient du demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}^2$ par un sous-groupe discret Γ de $SL(2, \mathbb{R})$:

$$S = \mathbb{H}^2 / \Gamma.$$

En identifiant T^1S, le fibré tangent unitaire de S, au quotient t $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$, on peut représenter le flot géodésique sur T^1S comme l'action sur $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ du groupe à un paramètre

$$\left\{ g_t = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} /t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Les flots horocycliques sont définis par l'action des deux groupes à un paramètre suivants :

$$\left\{ h_t^u = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} /t \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\left\{ h_t^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} /t \in \mathbb{R} \right\}.$$

On vérifie immédiatement les deux égalités :

$$g_t h_r^u g_t^{-1} = h_{e^t r}^u \qquad g_t h_r^s g_t^{-1} = h_{e^{-t} r}^s.$$

L'application

$$T : SL(2, \mathbb{R})/\Gamma \longrightarrow SL(2, \mathbb{R})/\Gamma \ : \ x\Gamma \longmapsto g_1 x \Gamma$$

laisse la mesure homogène m invariante.

Nous munissons T^1S d'une distance Riemannienne quelconque, notée d, et désignons par $B(x,r)$ la boule de centre x et de rayon r. Les égalités précédentes permettent d'établir l'existence d'une constante $P > 0$ telle que l'on ait, pour tout $x \in T^1S$ et tout $k \in \mathbb{N}$:

$$d(g_k x, g_k h_t^s x) \leq P e^{-k}\ d(x, h_t^s x) \ \text{ et } \ d(g_{-k} x, g_{-k} h_t^u x) \leq P e^{-k}\ d(x, h_t^u x).$$

Proposition III.1 *Soit f une fonction höldérienne sur T^1S d'ordre $\beta \leq 1$ sur T^1S. Si f est un cobord mesurable alors il existe une fonction ϕ höldérienne d'ordre $\beta/2$ telle que $f = \phi - \phi \circ T$.*

Preuve. Soit $R > 0$ tel que, pour tout x et y dans T^1S on ait $|f(x) - f(y)| \leq R\ d(x,y)^\beta$. Nous avons déjà remarqué que si f est un cobord mesurable alors c'est un cobord dans l'ensemble des fonctions de carré intégrable. En particulier il existe ϕ intégrable d'intégrale nulle telle que $f = \phi - T\phi$. Pour tout entier $n \geq 1$ notons $S_n f$ et $S_{-n} f$ les sommes

$$S_n f = \sum_0^{n-1} T^k f,$$

$$S_{-n} f = \sum_{-n}^{-1} T^k f.$$

L'égalité de cobord fournit les identités suivantes :

$$\frac{1}{N} \sum_1^N S_n f = \phi - \frac{1}{N} \sum_1^N T^n \phi,$$

$$\frac{1}{N} \sum_1^N S_{-n} f = -\phi + \frac{1}{N} \sum_1^N T^{-n} \phi.$$

Notons X_0 l'ensemble des points x tels que la valeur de ϕ en x soit donnée par les limites

$$\phi(x) = \lim \frac{1}{N} \sum_1^N S_n f(x) = -\lim \frac{1}{N} \sum_1^N S_{-n} f(x).$$

Les transformations T et T^{-1} étant ergodiques l'ensemble sur lequel les suites $\frac{1}{N}\sum_1^N T^n\phi$ et $\frac{1}{N}\sum_1^N T^{-n}\phi$ tendent vers 0 est de mesure 1, donc X_0 est de mesure 1.

Supposons que x et $h_t^s x$ appartiennent tous les deux à X_0. La régularité de f et les propriétés de contraction de T le long du flot horocyclique h^s conduisent aux inégalités suivantes :

$$|T^k f(x) - T^k f(h_t^s x)| \ = \ |f(T^k x) - f(T^k h_t^s x)|$$

$$
\begin{array}{ll}
\leq & Rd(T^k x, T^k h_t^s x)^\beta \\
\leq & RP^\beta e^{-k\beta} d(x, h_t^s x)^\beta .
\end{array}
$$

On en déduit

$$|S_n f(x) - S_n f(h_t^s x)| \leq RP^\beta (\sum_0^{n-1} e^{-k\beta}) d(x, h_t^s x)^\beta,$$

puis

$$|\phi(x) - \phi(h_t^s x)| \leq RP^\beta (\sum_0^{\infty} e^{-k\beta}) d(x, h_t^s x)^\beta.$$

Notons R' le réel $RP^\beta(\sum_0^\infty e^{-k\beta})$. Si x et $h_t^u x$ appartiennent tous les deux à X_0 on montre de la même façon en utilisant l'égalité $\phi(x) = -\lim \frac{1}{N} \sum_1^N S_{-n} f$ que l'on a

$$|\phi(x) - \phi(h_t^u x)| \leq R' d(x, h_t^u x)^\beta.$$

Ceci signifie que la restriction de ϕ à X_0 est régulière le long des flots horocycliques.

Par ailleurs on a le lemme suivant dont la démonstration est donnée plus bas.

Lemme Il existe $C > 0$, $\alpha > 0$ et X_4 de mesure 1 tels que pour tout $x \in X_4$, pour presque tout $y \in B(x, \alpha)$, il existe $(t_1, t_2, v_1, v_2) \in [-C\sqrt{d(x,y)}, C\sqrt{d(x,y)}]^4$ tel que x, $h_{t_1}^s x$, $h_{v_1}^u h_{t_1}^s x$, $h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x$ et $y = h_{v_2}^u h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x$ appartiennent à X_0.

On conclut de la manière suivante. Soit x un élément de X_4. D'après le lemme pour presque tout y il existe $(t_1, t_2, v_1, v_2) \in [-C\sqrt{d(x,y)}, C\sqrt{d(x,y)}]^4$ tel que x, $h_{t_1}^s x$, $h_{v_1}^u h_{t_1}^s x$, $h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x$ et $y = h_{v_2}^u h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x$ appartiennent à X_0. Il existe L tel que l'on ait

$$
\begin{array}{rcl}
|\phi(x) - \phi(y)| & \leq & |\phi(x) - \phi(h_{t_1}^s x)| + |\phi(h_{t_1}^s x) - \phi(h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)| \\
& & +|\phi(h_{v_1}^u h_{t_1}^s x) - \phi(h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)| \\
& & +|\phi(h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x) - \phi(h_{v_2}^u h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)| \\
& \leq & R'(d(x, h_{t_1}^s x)^\beta + d(h_{t_1}^s x, h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)^\beta \\
& & +d(h_{v_1}^u h_{t_1}^s x, h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)^\beta + d(h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x, h_{v_2}^u h_{t_2}^s h_{v_1}^u h_{t_1}^s x)^\beta) \\
& \leq & Ld(x,y)^{\beta/2}.
\end{array}
$$

La deuxième inégalité est vérifiée car nous avons vu plus haut que la restriction de ϕ à X_0 est régulière le long des flots horocycliques, la troisième car les applications $t \mapsto h_t^u z$ et $t \mapsto h_t^s z$ sont lipschitziennes (uniformément en z).

Par récurrence on construit une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans T^1S telle que, pour tout n, y_n appartient à X_4 et pour tout $k \leq n$ tel que $y_n \in B(y_k, a)$ on ait $|\phi(y_n) - \phi(y_k)| \leq Ld(y_n, y_k)^{\beta/2}$. La restriction de ϕ à l'ensemble $\{y_n/n \geq 0\}$ est höldérienne. Elle se prolonge en une fonction höldérienne. Pour presque tout point y, pour tout n tel que $y_n \in B(y, a)$, on a $|\phi(y_n) - \phi(y)| \leq Ld(y_n, y)^{\beta/2}$. En un tel point y la fonction ϕ coïncide nécessairement avec le prolongement höldérien de $\phi|_{\{y_n/n\geq 0\}}$. Finalement ϕ coïncide presque partout avec une fonction höldérienne.

□

Lemme III.2 *Il existe $C > 0$, $a > 0$ et X_4 de mesure 1 tels que pour tout $x \in X_4$, pour presque tout $y \in B(x, a)$, il existe $(t_1, t_2, v_1, v_2) \in [-C\sqrt{d(x,y)}, C\sqrt{d(x,y)}]^4$ tel que x, $h^s_{t_1}x$, $h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$, $h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ et $y = h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ appartiennent à X_0.*

Preuve. En tout point x l'application $(t, v, w) \longmapsto h^u_t g_v h^s_w x$ fournit un système de coordonnées locales en x de T^1S. La variété T^1S étant compacte on peut la recouvrir par un nombre fini d'ouverts dans lesquels ces coordonnées sont définies. En appliquant le théorème de Fubini on montre qu'il existe $a > 0$ (lié à la taille des cartes locales choisies) tel que :

- Il existe X_1 de mesure 1 tel que si y appartient à X_1 alors pour presque tout $t \in [-a, a]$ $h^s_t x \in X_0$,
- Il existe X_2 de mesure 1 tel que si y appartient à X_2 alors pour presque tout $(t, v) \in [-a, a]^2$ $h^u_v h^s_t x \in X_0$.

Posons $X_3 = X_0 \cap X_1 \cap X_2$. Si y appartient à X_3 alors pour presque tout $(t, v) \in [-a, a]^2$ y, $h^s_t x$ et $h^u_v h^s_t x$ appartiennent à X_0.

En reprenant le raisonnement précédent on montre qu'il existe un ensemble de mesure 1, X_4, tel que si y appartient à X_4 alors, pour presque tout $(t, v) \in [-a, a]^2$, y, $h^s_t x$ et $h^u_v h^s_t x$ appartiennent à X_3. Si y appartient à X_4 pour presque tout $(t, v, t_2, v_2) \in [-a, a]^4$ y, $h^s_t x$, $h^u_v h^s_t x$, $h^s_{t_2} h^u_v h^s_t x$ et $h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_v h^s_t x$ appartiennent à X_0.

Pour tout $r \in \mathbb{R}$, posons

$$v_1 = \sqrt{|e^{-r} - 1|}, \quad v_2 = -e^r v_1, \quad t_2 = \epsilon(r)\sqrt{|e^{-r} - 1|} \ \text{ et } \ t_1 = -e^r t_2,$$

où $\epsilon(r)$ vaut 1 ou -1 selon que $(e^{-r} - 1)$ est positif ou négatif. On vérifie immédiatement la relation

$$h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} = g_r.$$

Ceci permet d'affirmer que, quitte à prendre pour a un réel plus petit, il existe $C > 0$ tel que, pour tout x et dans T^1S et tout $r \leq a$ l'application

$$\Psi_x \ : \ [C\sqrt{r/2}, C\sqrt{r/2}]^4 \longrightarrow T^1S \quad : \quad (t_1, v_1, t_2, v_2) \longmapsto h^u_{v_2} h^s_{t_2} h^u_{v_1} h^s_{t_1} x$$

est surjective sur un voisinage de x contenant la boule $B(x,r)$. L'image d'un ensemble de mesure nulle par l'application Ψ_x est de mesure nulle. Donc si x appartient à X_4 et r est inférieur à a ce qui précède montre que pour presque tous les points y de de $B(x,r)$, il existe $(t_1,t_2,v_1,v_2) \in [-C\sqrt{r/2}, C\sqrt{r/2}]^4$ tel que x, $h^s_{t_1}x$, $h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$, $h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ et $y = h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ appartiennent à X_0. En particulier, pour tout entier k, pour presque tous les points y de de $B(x,2^{-k}a) \setminus B(x,2^{-k-1}a)$, il existe $(t_1,t_2,v_1,v_2) \in [-C\sqrt{2^{-k-1}a}, C\sqrt{2^{-k-1}a}]^4$ tel que x, $h^s_{t_1}x$, $h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$, $h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ et $y = h^u_{v_2}h^s_{t_2}h^u_{v_1}h^s_{t_1}x$ appartiennent à X_0. Dans ce cas $2^{-k-1}a$ est inférieur à $d(x,y)$. Comme $B(x,a) = \cup_k B(x,2^{-k}a) \setminus B(x,2^{-k-1}a)$ le lemme est prouvé. □

References

[CLB98] J.-P. Conze and S. Le Borgne, *Méthode de martingale et flot géodésique sur une surface compacte de courbure constante*, Tech. report, 1998.

[Kat71] Y. Katznelson, *Ergodic automorphisms of T^n are Bernoulli shifts*, Israel J. Math. **10** (1971), 186–195.

[KK96] A. Katok and A. Kononenko, *Cocycles' stability for partially hyperbolic systems*, Math. Res. Lett. **3** (1996), no. 2, 191–210.

[LBre] S. Le Borgne, *Limit theorems for non-hyperbolic automorphisms of the torus*, Israel J. Math. (à paraître).

[Leo64] V. P. Leonov, *Nekotorye primeneniya starshikh semiinvariantov k teorii statsionarnykh sluchaĭnykh protsessov*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1964.

[Liv71] A.N. Livshits, *Homology properties of y-systems*, Math. Notes (1971), 758–763.

[Vee86] W.A. Veech, *Periodic points and invariant pseudomeasures for toral endomorphisms*, Ergodic Theory Dynamical Systems **6** (1986), no. 3, 449–473.