Dépassement des sommes partielles pour des v.a. indépendantes sans moment

Jean-Pierre Conze, Yves Guivarc'h, Albert Raugi

IRMAR, Université de Rennes I

Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France

Si (X_n) est une suite stationnaire de v.a. positives intégrables, le théorème ergodique implique que, presque sûrement, X_{n+1} ne dépasse la somme $X_1+\ldots+X_n$ qu'un nombre fini de fois. On se propose de démontrer que, pour des v.a. i.i.d non intégrables telles que $I\!P(X_n > t)$ soit en $\frac{1}{t}$, le dépassement $X_{n+1} > X_1 + \ldots + X_n$ a lieu, presque sûrement, une infinité de fois.

Théorème : *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes strictement positives identiquement distribuées, de loi commune μ, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, I\!P)$. On suppose qu'il existe des réels strictement positifs C_1 et C_2 tels que :*

$$\frac{C_1}{1+t} \leq \mu(]t, +\infty[) \leq \frac{C_2}{1+t}, \ \forall t > 0.$$

Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{X_1 + \cdots + X_n}$ *diverge $I\!P$-p.s. et*

$$\sum_{n\geq 1} 1_{\{X_{n+1} > X_1 + \ldots + X_n\}} = +\infty, \ I\!P - p.s..$$

La démonstration de ce théorème va se faire en plusieurs étapes.

Nous appelons G la fonction définie pour $t > 0$ par : $G(t) = \mu(]t, +\infty[)$.

Première étape

Rappelons d'abord une extension classique du lemme de Borel-Cantelli (cf. Neveu [1], corollaire de la proposition IV-6-3).

Lemme 1 : *Soit* $(\mathcal{A}_n)_{n\geq 0}$ *une suite croissante de sous-tribus de* $\mathcal{F}$. *Soit* $(Z_n)_{n\geq 1}$ *une suite de v.a.r. définies sur un espace probabilisé* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *telles que, pour tout* $n \geq 1$, $0 \leq Z_n \leq 1$ *et* Z_n *est* $\mathcal{A}_n$*-mesurable.*

Alors $$\{\sum_{n\geq 1} Z_n < +\infty\} = \{\sum_{n\geq 1} \mathbb{E}[Z_n|\mathcal{A}_{n-1}] < +\infty\} \ \mathbb{P} - p.s..$$

Appelons $\mathcal{F}_0$ la tribu triviale et, pour $n \geq 1$, désignons par $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les v.a.r. X_k, $1 \leq k \leq n$. Pour tout entier $n \geq 1$, nous avons :

$$\mathbb{E}\big[1_{\{X_{n+1} > X_n + \ldots + X_1\}} | \mathcal{F}_n\big] = G(X_1 + \ldots + X_n).$$

Du lemme 1, il résulte alors que les deux assertions du théorème sont équivalentes. Dans la suite, nous prouverons la première.

Deuxième étape

Le lemme suivant est inspiré du lemme 2 de [2] (H. Diamond et J. Vaaler) :

Lemme 2 : *Soit* $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. *Pour* $\mathbb{P}$*-presque tout* $\omega \in \Omega_0$, *il existe un entier* $N(\omega)$ *tel que, pour tout entier* $n \geq N(\omega)$, *il existe au plus un entier* k *de* $\{1, \ldots, n\}$ *pour lequel* $X_k \geq n \ (log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Preuve : Considérons un réel $\alpha > 0$. Pour tout entier $p \geq 1$, posons :

$$A_p = \bigcup_{1\leq \ell < k \leq p} \{X_\ell > \alpha \ p \ (\log_2 p)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\} \cap \{X_k > \alpha \ p \ (\log_2 p)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}.$$

Nous avons

$$\mathbb{P}[A_p] \leq \sum_{1\leq \ell < k \leq p} G^2\big(\alpha \ p \ (\log_2 p)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big) \leq \frac{C_2^2}{2\alpha^2} \ \frac{1}{(\log_2 p)^{1+2\ \varepsilon}},$$

et donc $\sum_{m\geq 0} \mathbb{P}[A_{2^m}] < +\infty$.

Par suite pour $\mathbb{P}$-presque tout ω, il existe un entier $N_1(\omega)$ tel que, pour tout entier $m \geq N_1(\omega)$, il existe au plus un entier k de $\{1, \ldots, 2^m\}$ pour lequel $X_k \geq \alpha \ 2^m \ (\log_2 2^m)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Il s'ensuit que pour tout entier $n > 2^{N_1(\omega)}$, il existe au plus un entier k de $\{1, \ldots, 2^{[\log_2 n]+1}\}$ pour lequel $X_k \geq \alpha \ 2^{[\log_2 n]+1} \ (\log_2 2^{[\log_2 n]+1})^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Ceci implique qu'il existe au plus un entier k de $\{1, \ldots, n\}$ tel que $X_k \geq \alpha \ 2^{\frac{3}{2}+\varepsilon} \ n \ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. D'où le résultat, en prenant $\alpha = 2^{-(\frac{3}{2}+\varepsilon)}$.

□

Troisième étape

Lemme 3 : *Soit $\varepsilon > 0$. Pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un réel $C(\omega) > 1$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$,*

$$\frac{n\ \log_2 n}{C(\omega)} \leq \sum_{k=1}^{n} X_k\ 1_{\{X_k \leq n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}} \leq C(\omega)\ n\ \log_2 n.$$

Preuve. Pour tout entier $n \geq 1$, notons T_n les sommes tronquées :

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k\ 1_{\{X_k \leq n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}.$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_n] &= n\ \mathbb{E}\big[X_1\ 1_{\{X_1 \leq n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}\big] \\
&= n \int_0^{n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \mathbb{P}[t < X_1 \leq n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}]\ dt \\
&= n \int_0^{n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} G(t)\ dt - n^2\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon} G\big(n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big).
\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que

$$C_1 \leq \liminf_n \frac{\mathbb{E}[T_n]}{n\ \log_2 n} \leq \limsup_n \frac{\mathbb{E}[T_n]}{n\ \log_2 n} \leq C_2. \tag{1}$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
var(T_n) &= n\ var\big(X_1\ 1_{\{X_1 \leq n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}\big) \\
&\leq n\ \mathbb{E}\big[X_1^2\ 1_{\{X_1 \leq n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}\big] \\
&\leq n \int_0^{n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} 2\ t\ \mathbb{P}\big[t < X_1 \leq n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big]\ dt \\
&\leq n \int_0^{n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} 2\ t\ G(t)\ dt \\
&\leq 2\ C_2\ n^2\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.
\end{aligned}$$

D'où la majoration :

$$var\Big(\frac{T_n}{n\ \log_2 n}\Big) \leq \frac{2\ C_2}{(\log_2 n)^{\frac{3}{2}-\varepsilon}},\ \forall n \geq 2.$$

On en déduit la convergence de la série $\sum_{p\geq 1} var(\frac{T_{2^p}}{2^p\ \log_2 2^p})$ et par suite la convergence $I\!P$-p.s. vers zéro de la suite de v.a.r. $(\frac{T_{2^p} - I\!E[T_{2^p}]}{2^p\ \log_2 2^p})_{p\geq 0}$.

Compte tenu des inégalités (1), il s'ensuit que :

$$C_1 \leq \liminf_p \frac{T_{2^p}}{2^p\ \log_2 2^p} \leq \limsup_p \frac{T_{2^p}}{2^p\ \log_2 2^p} \leq C_2; \tag{2}$$

d'où l'on déduit :

$$\frac{1}{2}\ C_1 \leq \liminf_n \frac{T_n}{n\ \log_2 n} \leq \limsup_n \frac{T_n}{n\ \log_2 n} \leq 2\ C_2.$$

□

Remarque : Lorsque $G(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{C}{t}$, pour un réel $C > 0$, alors nous obtenons :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{T_n}{n\ \log_2 n} = C.$$

Il suffit dans la démonstration de remplacer la suite d'entiers $(2^p)_{p\geq 0}$ par les suites $([a^p])_{p\geq 0}$ avec a réel > 1. ($[a^p]$ désigne la partie entière du réel a^p).

Quatrième étape

Nous avons :

$$\sum_{k=1}^n X_k = T_n + \sum_{k=1}^n X_k\ 1_{\{X_k > n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}.$$

Posons $M_n(\omega) = \max\{X_k(\omega) : 1 \leq k \leq n\}$ D'après le lemme 2, pour $I\!P$-presque tout $\omega \in \Omega$, il existe un entier $N(\omega)$ tel que, pour tout $n \geq N(\omega)$, la somme

$$\sum_{k=1}^n X_k(\omega)\ 1_{\{X_k > n\ (\log_2 n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\}}(\omega)$$

soit réduite à au plus un terme et donc majorée par $M_n(\omega)$.

Compte tenu du lemme 3, nous avons donc, pour n assez grand, $X_1 + \cdots + X_n \leq M_n + C(\omega)\ n \log_2 n$. Pour montrer le théorème, il suffit de montrer que la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{M_n + n\ \log_2 n}$ diverge $I\!P$-p.s..

Nous avons, pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{M_k + k\ \log_2 k} \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{M_k + k\ \log_2 k}\ 1_{\{M_k \leq k\ \log_2 k\}}$$
$$\geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2\ k\ \log_2 k}\ 1_{\{M_k \leq k\ \log_2 k\}}$$
$$\geq \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{2\ k\ \log_2 k}$$
$$- \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2\ k\ \log_2 k}\ 1_{\{M_k > k\ \log_2 k\}}.$$

Or nous avons :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2\ k\ \log_2 k} I\!P\big[\{M_k > k\ \log_2 k\}\big] \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1 - \big(1 - G(k\ \log_2 k)\big)^k}{2\ k\ \log_2 k}$$
$$\leq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2\ k\ (\log_2 k)^2} < +\infty.$$

La série $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2\ k\ \log_2 k}\ 1_{\{M_k > k\ \log_2 k\}}$ converge donc $I\!P$-p.s..

D'où le résultat.

□

Remarque : Si la fonction G est de l'ordre de $\frac{1}{t^\alpha}$ avec $0 < \alpha < 1$, ou plus généralement si la fonction $\frac{1}{G}$ est sous-additive, nous avons

$$\sum_{k\geq 1} 1_{\{X_{n+1} > X_1 + \ldots + X_n\}} = +\infty \quad I\!P - p.s.$$

En effet les v.a.r. $\displaystyle\frac{1}{G(X_k)}$, $k \geq 1$, vérifient $\displaystyle I\!P\Big(\frac{1}{G(X_k)} \geq t\Big) = \frac{1}{t}$.

Le théorème implique alors que :

$$\sum_{k\geq 1} 1_{\{\frac{1}{G(X_{n+1})} > \frac{1}{G(X_1)} + \ldots + \frac{1}{G(X_n)}\}} = +\infty \quad I\!P - p.s$$

et la sous-additivité de la fonction $\frac{1}{G}$ donne le résultat voulu.

Nous remercions Christian Bonatti et Bernard Schmitt d'avoir attiré notre attention sur le problème des dépassements $X_{n+1} > X_1 + \ldots + X_n$ pour des variables sans moment.

Références

H. G. Diamond, J. D. Vaaler : Estimates for partial sums of continued fraction partial quotients, Pacific J. of Math., Vol. 122, no 1, 1986.

J. Neveu : *Calcul des Probabilités*, Masson.

le 18 juin 1999