Méthodes Combinatoires en Estimation de Densité et Classification de Courbes

Laurent Rouvière

Laboratoire de Statistique (Université Rennes 2)

6 avril 2006

Plan de l'exposé

Le contexte

- Soient $X_1, \ldots, X_n$ (i.i.d.) issus d'une densité f (inconnue) sur $\mathbb{R}^d$.
- Problème : Trouver une fonction $f_n(x) = f_n(x; X_1, \ldots, X_n)$ qui soit "proche" de f.
- Critère L_1

$$\|f - f_n\|_1 = \int |f - f_n|$$

$\longrightarrow$ calculable;
$\longrightarrow$ interprétable "graphiquement";
$\longrightarrow$ interprétable en terme de probabilités.

Scheffé

$$\int |f - f_n| = 2 \sup_{B \in \mathcal{B}} \left| \int_B f - \int_B f_n \right| .$$

Les histogrammes modifiés

- Soit ℓ un entier et soit $h = 1/\ell$;
- Soit g une densité connue associée à la loi de probabilité ν_g;
- Soit $P = \{A_1, \ldots, A_\ell\}$ une partition de $\mathbb{R}^d$ telle que $\nu_g(A_i) = h$;

$$f_n(x) = \left[(1-a_n)\frac{\mu_n(A(x))}{h} + a_n\right] g(x)$$

$$= \frac{n\mu_n(A(x)) + 1}{nh+1}\, g(x)$$

où $A(x) = A_i$ si $x \in A_i$.

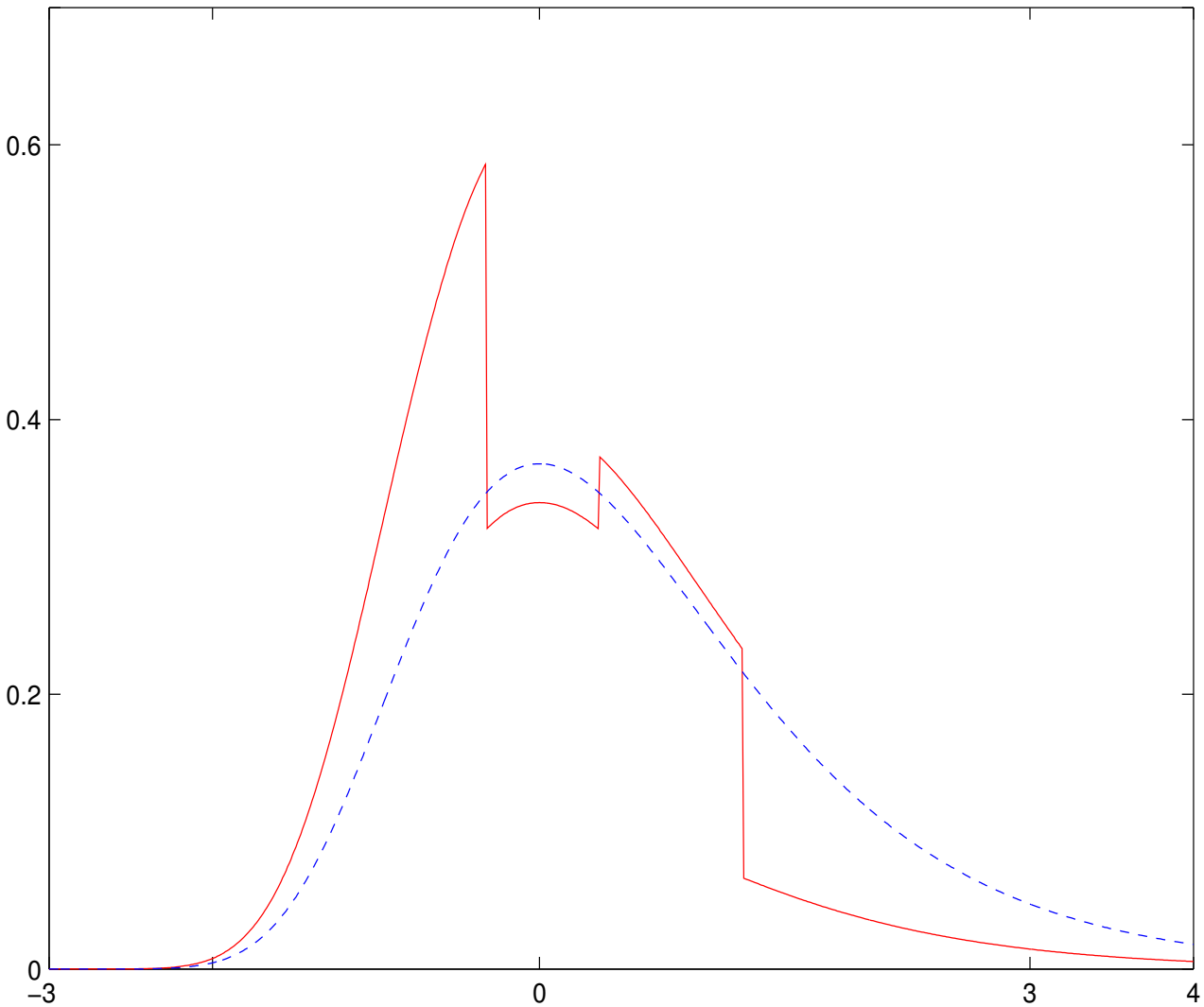
Les histogrammes modifiés

- Soit ℓ un entier et soit $h = 1/\ell$;
- Soit g une densité connue associée à la loi de probabilité ν_g;
- Soit $P = \{A_1, \ldots, A_\ell\}$ une partition de $\mathbb{R}^d$ telle que $\nu_g(A_i) = h$;

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \left[(1 - a_n)\frac{\mu_n\big(A(x)\big)}{h} + a_n\right] g(x) \\ &= \frac{n\mu_n\big(A(x)\big) + 1}{nh + 1}\, g(x) \end{aligned}$$

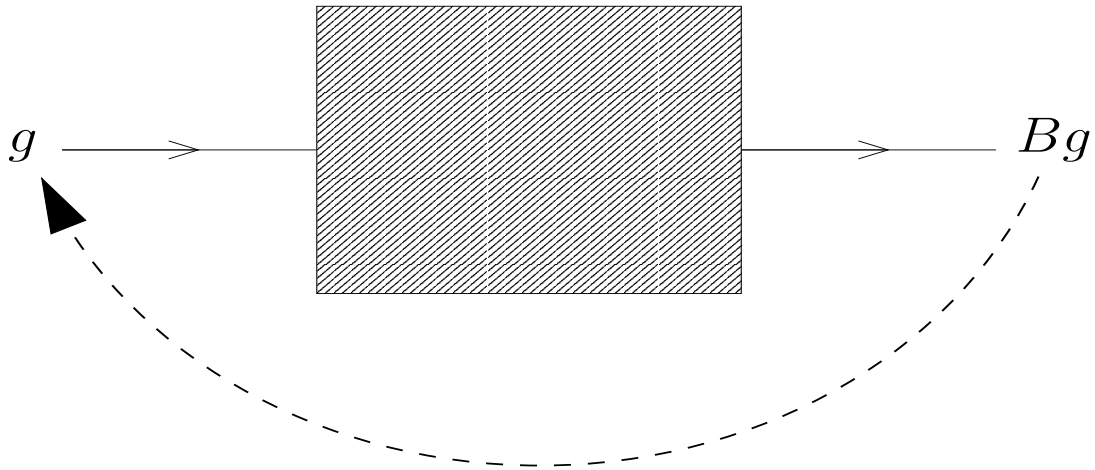
où $A(x) = A_i$ si $x \in A_i$.

Un exemple



Un sytème dynamique

Fixons l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$ et le nombre de classes ℓ.



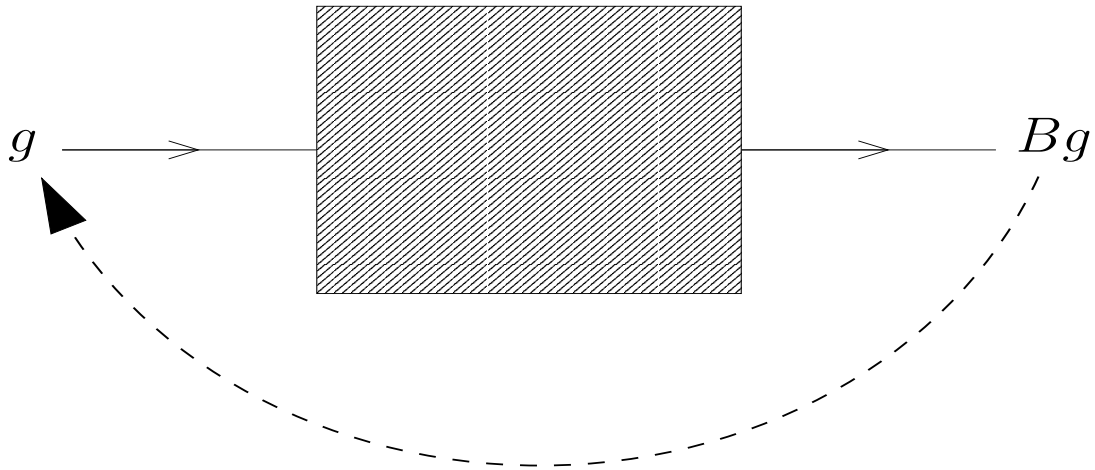
$\longrightarrow$ suite ou trajectoire d'estimateurs de f : $\{B^p g\}_{p \geq 0}$.

Théorème (Berlinet et Biau, 2004)

Si ℓ divise n alors la suite de densités $\{B_\ell^p g\}_{p \geq 0}$ est presque sûrement stationnaire.

Un sytème dynamique

Fixons l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$ et le nombre de classes ℓ.



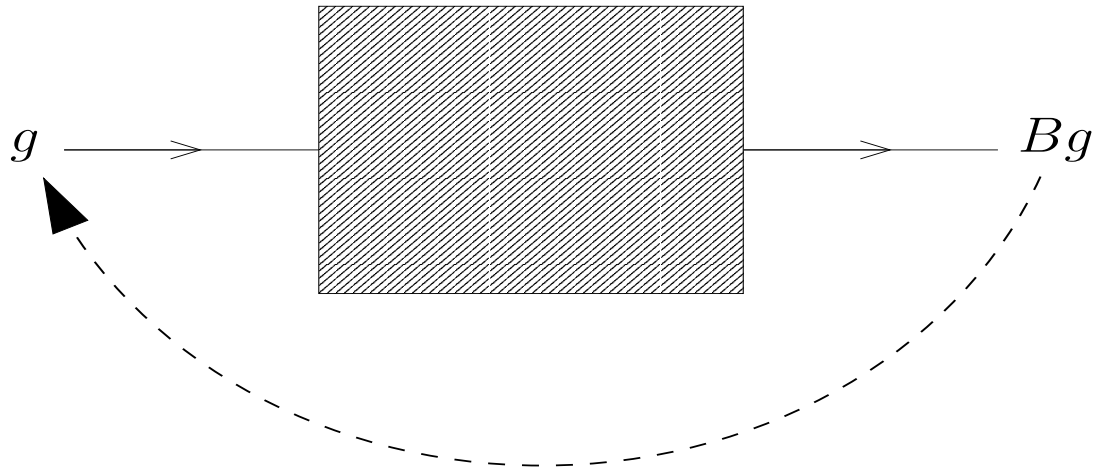
$\longrightarrow$ suite ou trajectoire d'estimateurs de f : $\{B^p g\}_{p \geq 0}$.

Théorème (Berlinet et Biau, 2004)

Si ℓ divise n alors la suite de densités $\{B_\ell^p g\}_{p \geq 0}$ est presque sûrement stationnaire.

Un sytème dynamique

Fixons l'échantillon $X_1, \ldots, X_n$ et le nombre de classes ℓ.



$\longrightarrow$ suite ou trajectoire d'estimateurs de f : $\{B^p g\}_{p \geq 0}$.

Théorème (Berlinet et Biau, 2004)

Si ℓ divise n alors la suite de densités $\{B_\ell^p g\}_{p \geq 0}$ est presque sûrement stationnaire.

Une application

- La densité de référence est un estimateur à noyau : $g = g_{n,h}$.
- La fenêtre est sélectionnée de deux manières différentes :
  1. Méthode Plug-in L_2.
  2. Méthode du double noyau.

Objectif

- Choisir un estimateur f_n dans la famille d'estimateurs "itérés";
- Comparer l'estimateur sélectionné à l'estimateur à noyau initial :

$$\|f - f_n\|_1 < \|f - g_{n,h}\|_1 \ ?$$

Une application

- La densité de référence est un estimateur à noyau : $g = g_{n,h}$.
- La fenêtre est sélectionnée de deux manières différentes :
  1. Méthode Plug-in L_2.
  2. Méthode du double noyau.

Objectif

- Choisir un estimateur f_n dans la famille d'estimateurs "itérés";
- Comparer l'estimateur sélectionné à l'estimateur à noyau initial :

$$\|f - f_n\|_1 < \|f - g_{n,h}\|_1 \ ?$$

Une application

- La densité de référence est un estimateur à noyau : $g = g_{n,h}$.
- La fenêtre est sélectionnée de deux manières différentes :
  1. Méthode Plug-in L_2.
  2. Méthode du double noyau.

Objectif

- Choisir un estimateur f_n dans la famille d'estimateurs "itérés";
- Comparer l'estimateur sélectionné à l'estimateur à noyau initial :

$$\|f - f_n\|_1 < \|f - g_{n,h}\|_1 \ ?$$

Les densités tests

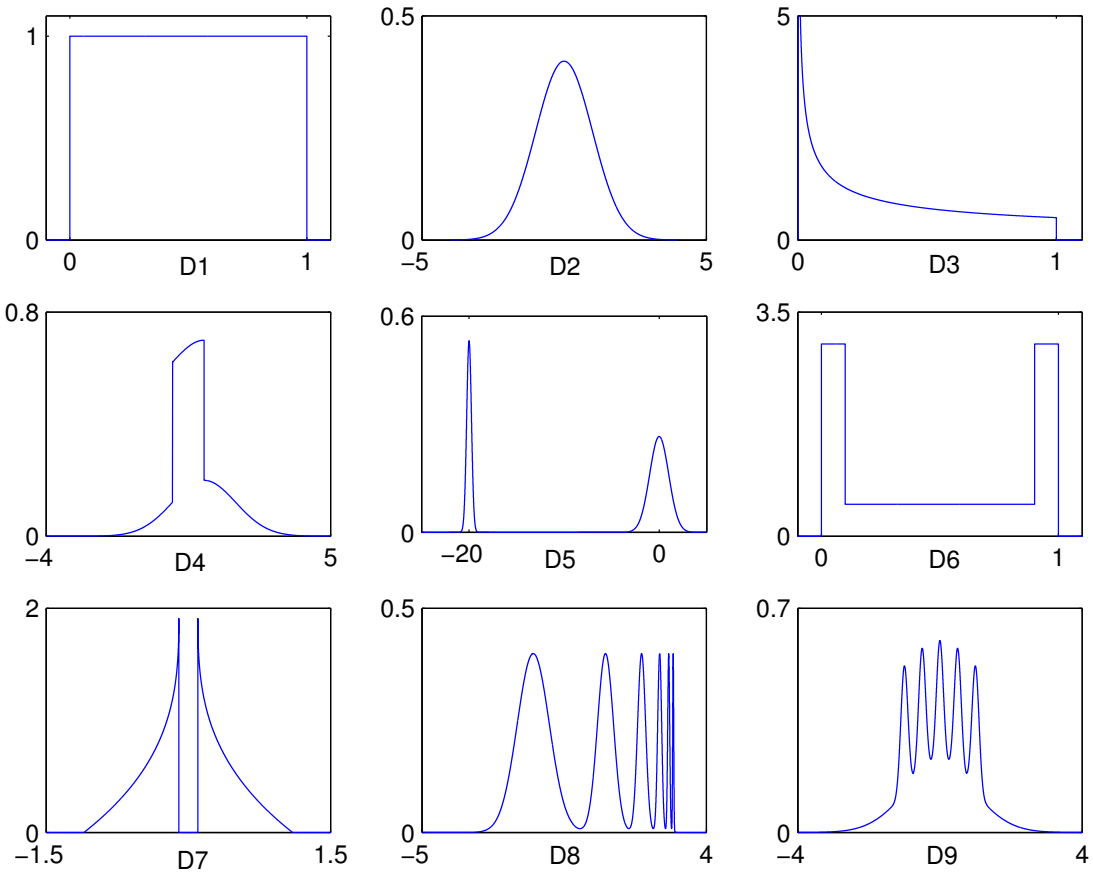
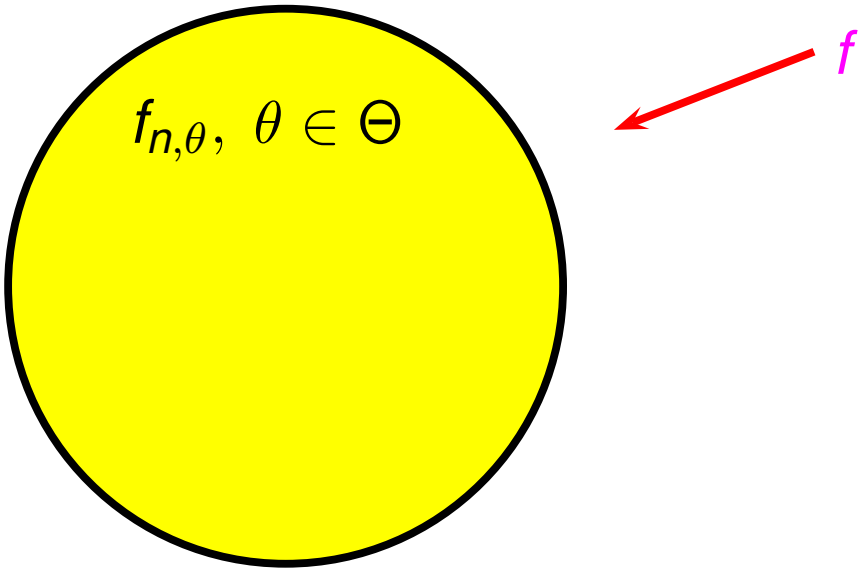


Figure: Les 9 densités tests.

Résultats

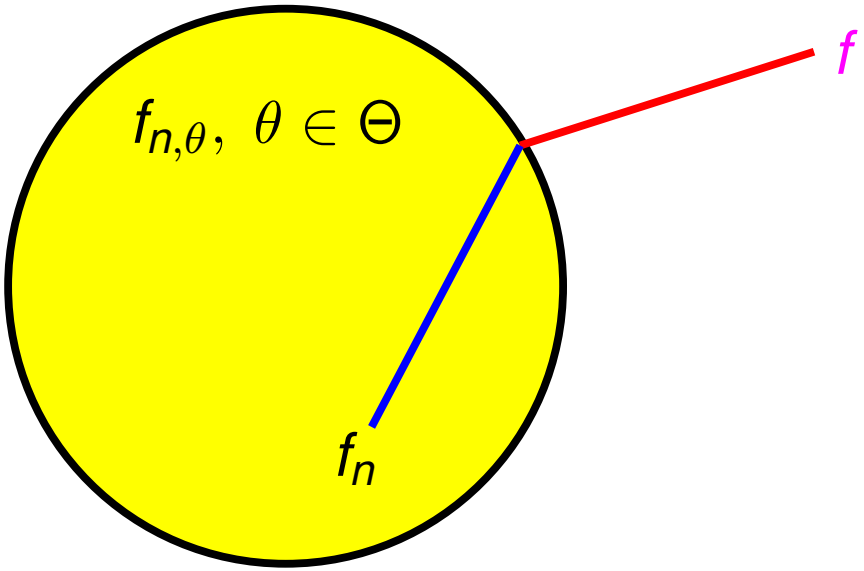
f	$L_1(g_{n,h_{pi}})$	$L_1(f_n)$	**WIN**	$L_1(g_{n,h_{dn}})$	$L_1(f_n)$	**WIN**
D1	0.18	0.20	●	0.21	0.21	●
D2	0.07	0.08	●	0.17	0.14	●
D3	0.37	0.30	●	0.34	0.28	●
D4	0.22	0.20	●	0.22	0.19	●
D5	1.20	0.35	●	0.46	0.32	●
D6	0.75	0.30	●	0.36	0.31	●
D7	0.31	0.27	●	0.40	0.25	●
D8	0.57	0.37	●	0.28	0.27	●
D9	0.34	0.27	●	0.46	0.26	●

Choisir une densité



Etant donné un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ issu de f, trouver le meilleur $f_{n,\theta}$, $\theta \in \Theta$.

Choisir une densité



Etant donné un échantillon aléatoire $X_1, \ldots, X_n$ issu de f, trouver le meilleur $f_{n,\theta}$, $\theta \in \Theta$.

$$\mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} \leq C\big(1 + \Sigma_1(n)\big) \inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,\theta} - f| \right\} + \Sigma_2(n).$$

La méthode combinatoire (1)

- Contexte général : $\mathcal{F}$=classe d'estimateurs $f_{n,\theta}$, $\theta \in \Theta$.
- Exemples : fenêtre de l'estimateur à noyau, pas de l'histogramme...
- "Data splitting" : Soit $m < n$,

$$\underbrace{X_1, \ldots, X_{n-m}}_{\downarrow} \qquad \underbrace{X_{n-m+1}, \ldots, X_n}_{\downarrow}$$

construction de l'estimateur : $f_{n-m,\theta}$ — échantillon de validation

La méthode combinatoire (2)

- Critère de sélection pour une densité $f_{n-m,\theta} \in \mathcal{F}$:

$$\Delta_\theta = \sup_{A \in \mathcal{A}_\Theta} \left| \int_A f_{n-m,\theta} - \mu_m(A) \right| .$$

- Classe de Yatracos :

$$\mathcal{A}_\Theta = \left\{ \{x : f_{n-m,\theta}(x) > f_{n-m,\theta'}(x)\} : (\theta, \theta') \in \Theta^2 \right\} .$$

- L'estimateur de la distance minimum :

$$\Delta_{\theta^*} < \inf_{\theta \in \Theta} \Delta_\theta + \frac{1}{n} .$$

La méthode combinatoire (2)

- Critère de sélection pour une densité $f_{n-m,\theta} \in \mathcal{F}$:

$$\Delta_\theta = \sup_{A \in \mathcal{A}_\Theta} \left| \int_A f_{n-m,\theta} - \mu_m(A) \right| .$$

- Classe de Yatracos :

$$\mathcal{A}_\Theta = \left\{ \{x : f_{n-m,\theta}(x) > f_{n-m,\theta'}(x)\} : (\theta, \theta') \in \Theta^2 \right\} .$$

- L'estimateur de la distance minimum :

$$\Delta_{\theta^*} < \inf_{\theta \in \Theta} \Delta_\theta + \frac{1}{n} .$$

La méthode combinatoire (2)

- Critère de sélection pour une densité $f_{n-m,\theta} \in \mathcal{F}$:

$$\Delta_\theta = \sup_{A \in \mathcal{A}_\Theta} \left| \int_A f_{n-m,\theta} - \mu_m(A) \right| .$$

- Classe de Yatracos :

$$\mathcal{A}_\Theta = \left\{ \{x : f_{n-m,\theta}(x) > f_{n-m,\theta'}(x)\} : (\theta, \theta') \in \Theta^2 \right\} .$$

- L'estimateur de la distance minimum :

$$\Delta_{\theta^*} < \inf_{\theta \in \Theta} \Delta_\theta + \frac{1}{n} .$$

Théorème (Devroye et Lugosi, 2001)

Soit f_n l'estimateur de la distance minimum. On a :

$$\mathbf{E}\left\{\int |f_n - f|\right\} \leq 3 \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n-m,\theta} - f|\right\} + 4\mathbf{E}\Delta + \frac{3}{n},$$

où

$$\Delta = \sup_{A\in\mathcal{A}_\Theta} \left| \int_A f - \mu_m(A) \right|.$$

Corollaire

$$\mathbf{E}\left\{\int |f_n - f|\right\} \leq 3 \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n-m,\theta} - f|\right\} + 8\,\mathbf{E}\left\{\sqrt{\frac{\log 2\,\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m)}{m}}\right\} + \frac{3}{n}.$$

où

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m) = \max_{x_1,\ldots,x_m\in\mathbb{R}^d} Card\left\{\{x_1,\ldots,x_m\} \cap A : A \in \mathcal{A}_\Theta\right\}.$$

Théorème (Devroye et Lugosi, 2001)

Soit f_n l'estimateur de la distance minimum. On a :

$$\mathbf{E}\left\{\int |f_n - f|\right\} \leq 3 \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n-m,\theta} - f|\right\} + 4\mathbf{E}\Delta + \frac{3}{n},$$

où

$$\Delta = \sup_{A\in\mathcal{A}_\Theta} \left| \int_A f - \mu_m(A) \right|.$$

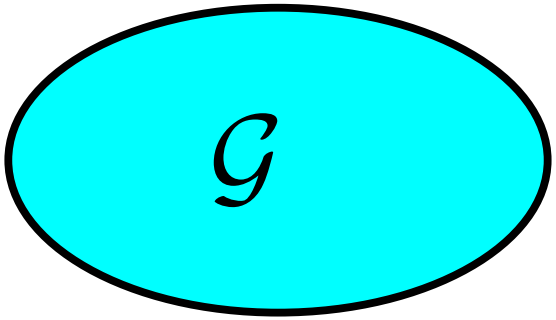
Corollaire

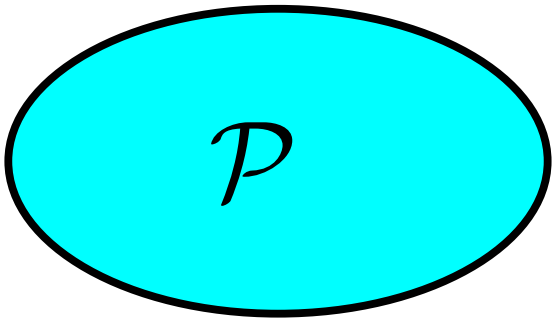
$$\mathbf{E}\left\{\int |f_n - f|\right\} \leq 3 \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n-m,\theta} - f|\right\} + 8\,\mathbf{E}\left\{\sqrt{\frac{\log 2\,\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m)}{m}}\right\} + \frac{3}{n}.$$

où

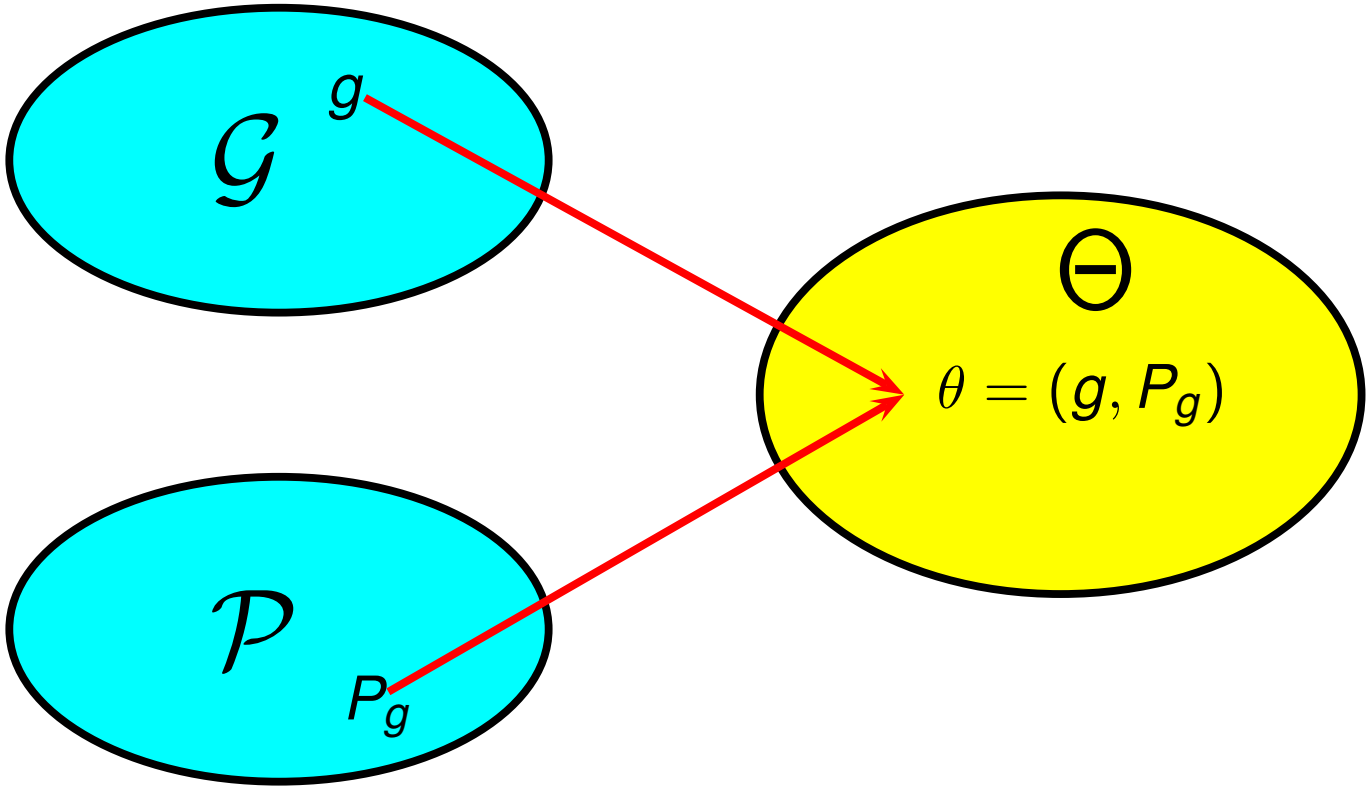
$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m) = \max_{x_1,\ldots,x_m\in\mathbb{R}^d} Card\left\{\{x_1,\ldots,x_m\} \cap A : A \in \mathcal{A}_\Theta\right\}.$$

Le modèle



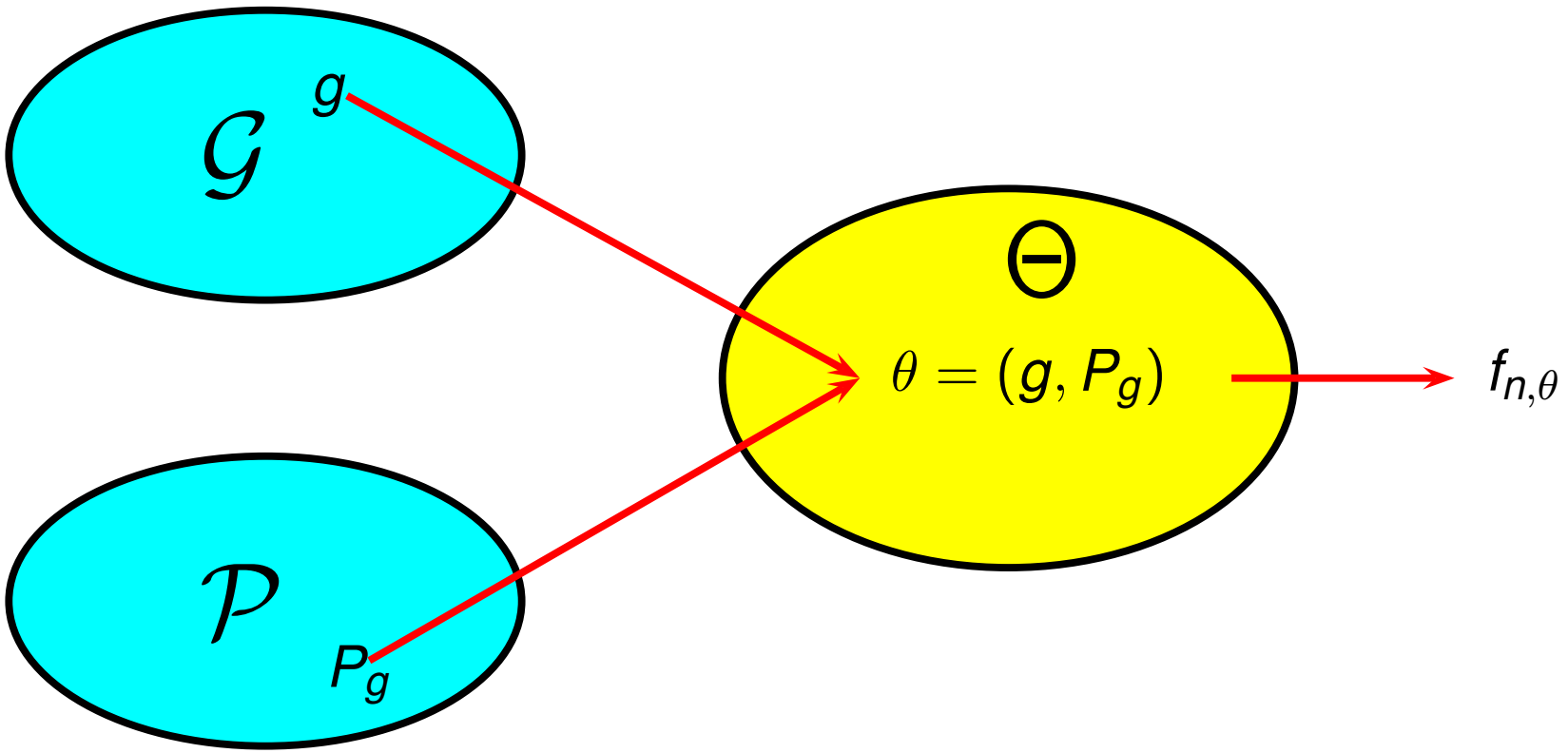


Le modèle



$$\Theta = \left\{(g, P_g), g \in \mathcal{G},\ P_g = \{A_1, \ldots, A_\ell\} \in \mathcal{P}, \ell \leq r,\ \nu_g(A_i) = 1/\ell\right\}.$$

Le modèle



$$\Theta = \left\{(g, P_g), g \in \mathcal{G},\ P_g = \{A_1, \ldots, A_\ell\} \in \mathcal{P}, \ell \leq r,\ \nu_g(A_i) = 1/\ell\right\}.$$

Résultats

$$\mathcal{A}_\Theta = \left\{ \{x : f_{n-m,\theta}(x) > f_{n-m,\theta'}(x)\} : (\theta, \theta') \in \Theta^2 \right\}.$$

Théorème

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m) \leq \mathbf{S}_{\mathcal{D}}(m) \left[\mathbf{S}_{\mathcal{P}}\left(m(n-m)\right) \right]^{4r},$$

où

$$\mathcal{D} = \left\{ \{(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* : \alpha z g(x) - g'(x) > 0\} : \alpha \in \mathbb{R}_+^*, (g, g') \in \mathcal{G}^2 \right\}.$$

et $\mathbf{S}_{\mathcal{P}}(j)$ *est le coefficient de pulvérisation associé à la classe des ensembles de* $\mathcal{P}$.

Résultats

$$\mathcal{A}_\Theta = \left\{ \{x : f_{n-m,\theta}(x) > f_{n-m,\theta'}(x)\} : (\theta, \theta') \in \Theta^2 \right\}.$$

Théorème

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m) \leq \mathbf{S}_{\mathcal{D}}(m) \left[\mathbf{S}_{\mathcal{P}}\left(m(n-m)\right) \right]^{4r},$$

où

$$\mathcal{D} = \left\{ \{(x,z) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+^* : \alpha z g(x) - g'(x) > 0\} : \alpha \in \mathbb{R}_+^*, (g, g') \in \mathcal{G}^2 \right\}.$$

et $\mathbf{S}_{\mathcal{P}}(j)$ *est le coefficient de pulvérisation associé à la classe des ensembles de* $\mathcal{P}$.

Corollaire (1)

$$\mathbf{E}\left\{\int |f_n - f|\right\} \leq 3 \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n-m,\theta} - f|\right\} + 8\sqrt{\frac{\log 2 + \log \mathbf{S}_{\mathcal{D}}(m) + 4r \log \mathbf{S}_{\mathcal{P}}\left(m(n-m)\right)}{m}} + \frac{3}{n}\,.$$

Théorème

On a

$$\inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n-m,\theta} - f|\right\} \leq \left(1 + \Sigma_1(m,r,n)\right) \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n,\theta} - f|\right\}.$$

Si m et r sont tels que $\frac{m}{n} \to 0$ et $\frac{mr}{n^{3/2}} \to 0$, alors

$$\Sigma_1(m,r,n) \to 0\,.$$

Corollaire (1)

$$\mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} \leq 3 \inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n-m,\theta} - f| \right\} + 8\sqrt{\frac{\log 2 + \log \mathbf{S}_{\mathcal{D}}(m) + 4r \log \mathbf{S}_{\mathcal{P}}\left(m(n-m)\right)}{m}} + \frac{3}{n}\,.$$

Théorème

On a

$$\inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n-m,\theta} - f| \right\} \leq \left(1 + \Sigma_1(m,r,n)\right) \inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,\theta} - f| \right\}.$$

Si m et r sont tels que $\frac{m}{n} \to 0$ et $\frac{mr}{n^{3/2}} \to 0$, alors

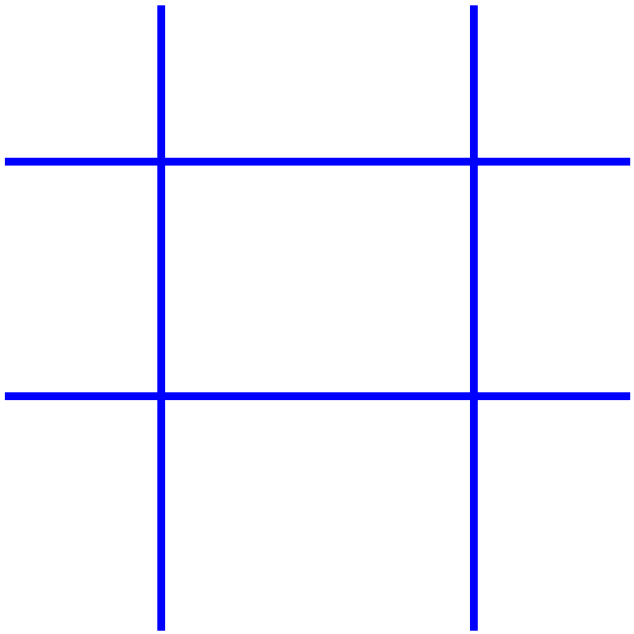
$$\Sigma_1(m,r,n) \to 0\,.$$

Un exemple multivarié

$$\mathcal{G} = \left\{ g_{\mu,\Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)} \right\}.$$

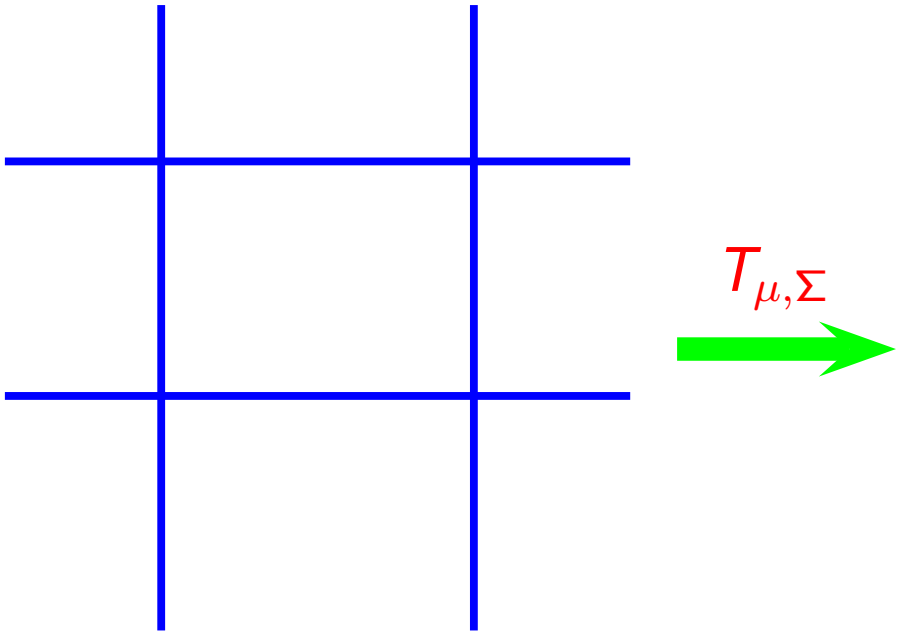
Un exemple multivarié

$$\mathcal{G} = \left\{ g_{\mu,\Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)} \right\}.$$



Un exemple multivarié

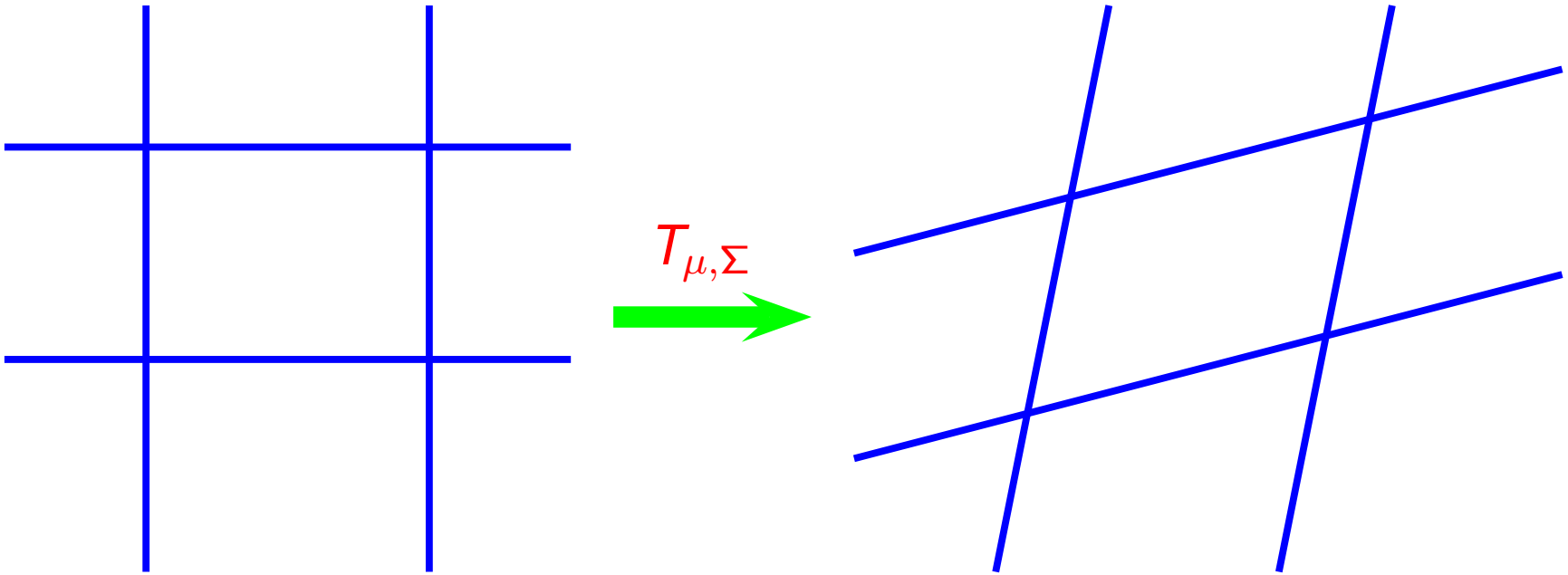
$$\mathcal{G} = \left\{ g_{\mu,\Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)} \right\}.$$



$$T_{\mu,\Sigma}(x) = \Sigma^{1/2}x + \mu\,.$$

Un exemple multivarié

$$\mathcal{G} = \left\{ g_{\mu,\Sigma}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)} \right\}.$$



$$T_{\mu,\Sigma}(x) = \Sigma^{1/2}x + \mu\,.$$

Un exemple multivarié

Sélection de θ dans Θ:

$$\left\{(\mu, \Sigma, \ell_1, \ldots, \ell_d), \mu \in \mathbb{R}^d, \Sigma \in \mathbf{SDP(d)}, \ell_j \in \mathbb{N}^*, \prod_{j=1}^{d} \ell_j \leq r\right\}.$$

On montre alors que

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{\mathcal{P}}(j) \leq (j+1)^{2d(d+1)} \\ \mathbf{S}_{\mathcal{D}}(j) \leq (j+1)^{d(d+3)/2+2} \end{cases}.$$

Un exemple multivarié

Sélection de θ dans Θ:

$$\left\{(\mu, \Sigma, \ell_1, \ldots, \ell_d), \mu \in \mathbb{R}^d, \Sigma \in \mathbf{SDP(d)}, \ell_j \in \mathbb{N}^*, \prod_{j=1}^{d} \ell_j \leq r\right\}.$$

On montre alors que

$$\begin{cases} \mathbf{S}_{\mathcal{P}}(j) \leq (j+1)^{2d(d+1)} \\ \\ \mathbf{S}_{\mathcal{D}}(j) \leq (j+1)^{d(d+3)/2+2} \end{cases}.$$

Résultats

Corollaire

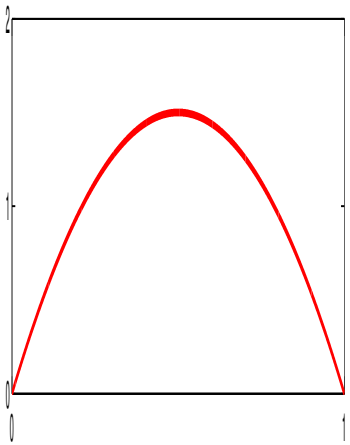
Si $\mathbf{S}_{\mathcal{D}}(j)$ *et* $\mathbf{S}_{\mathcal{P}}(j)$ *sont polynomiaux en* j*. Alors les choix*

$$m = \frac{n}{\log n} \qquad et \qquad r = n^a, \quad 0 < a \leq 1/2,$$

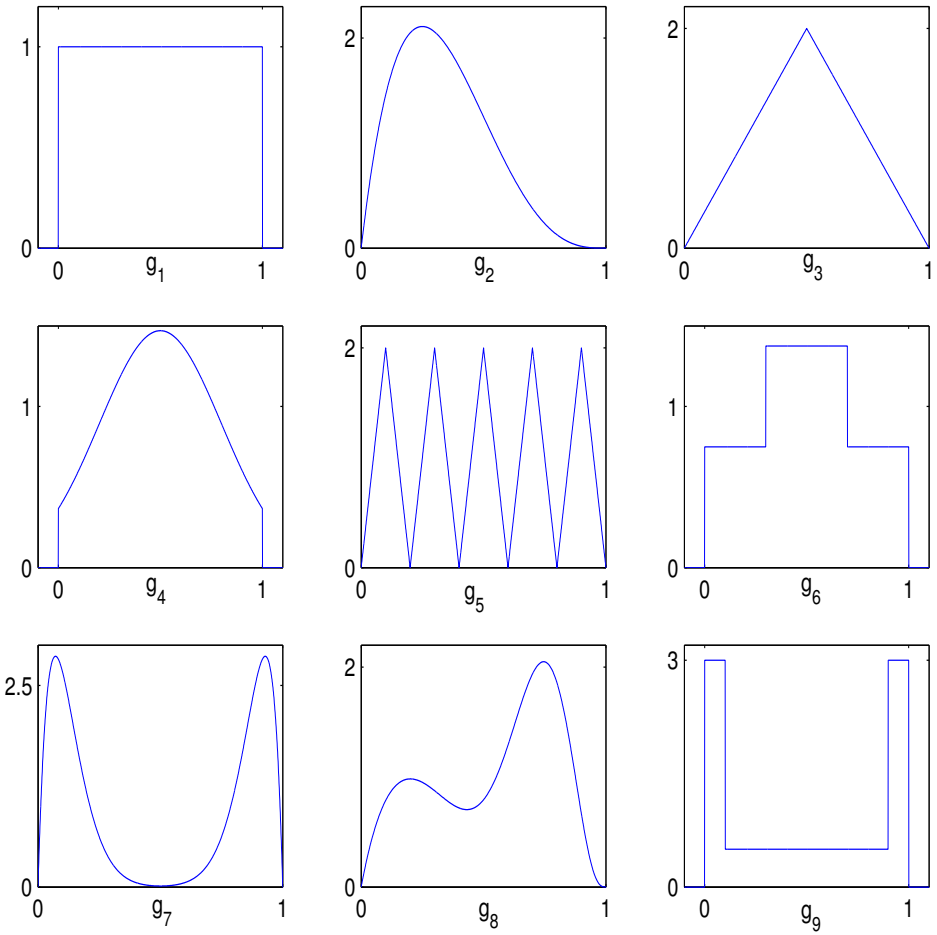
donnent

$$\mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} \leq 3 \inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n-m,\theta} - f| \right\} + O\left(\frac{\log n}{n^{(1-a)/2}} \right).$$

Simulations



Densité à estimer



Densités de référence

Résultats

	$n = 200, m = 50, r = 16$		
g	$\int \lvert f_{n,g} - f \rvert$	$\int \lvert f_{n,\theta_g^\star} - f \rvert$	$\hat{\ell}_n$
g_1	0.21	0.15	9.68
g_2	0.33	0.30	12.92
g_3	0.17	0.11	7.28
g_4	0.18	0.10	8.28
g_5	0.43	0.40	14.28
g_6	0.23	0.19	10.84
g_7	0.82	0.81	15.64
g_8	0.22	0.17	9.04
g_9	0.24	0.17	10.92
g_{1-9}	**0.22**	**0.10**	**8.28**

Résultats

	$n = 200, m = 50, r = 16$		
g	$\int \lvert f_{n,g} - f \rvert$	$\int \lvert f_{n,\theta_g^\star} - f \rvert$	$\hat{\ell}_n$
g_1	0.21	0.15	9.68
g_2	**0.33**	0.30	12.92
g_3	0.17	0.11	7.28
g_4	0.18	0.10	8.28
g_5	**0.43**	0.40	14.28
g_6	**0.23**	0.19	10.84
g_7	**0.82**	0.81	15.64
g_8	**0.22**	0.17	9.04
g_9	**0.24**	0.17	10.92
g_{1-9}	**0.22**	**0.10**	**8.28**

Estimateurs à noyau

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de densité f

$$f_n(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

Estimateurs à noyau variable

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de densité f

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h(x, X_i)} K\left(\frac{x - X_i}{h(x, X_i)} \right)$$

où $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$.

Estimateurs à noyau variable

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. de densité f

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h(x, X_i)} K\left(\frac{x - X_i}{h(x, X_i)} \right)$$

où $h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to (0, \infty)$.

Bonnes propriétés :

- En grande dimension;
- En terme de vitesses de convergence (réduction du biais);
- A distance finie pour certaines classes de densités.

Un exemple

Soit $\mathcal{F}_B$ la classe des densités

- croissantes;
- convexes;
- $\sup_{(0,1)} f(x) \leq B$

Alors

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_B} \inf_{h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,h(x)} - f| \right\} \leq \sqrt{\frac{4B}{n}}$$

Un exemple

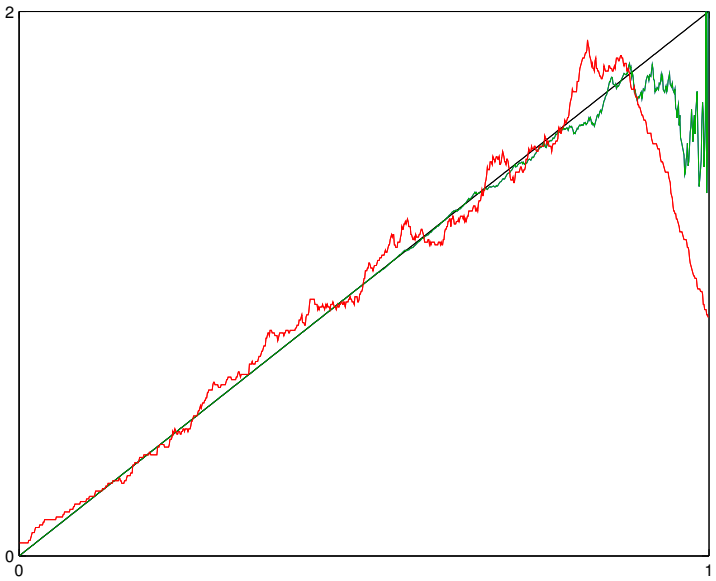
Soit $\mathcal{F}_B$ la classe des densités

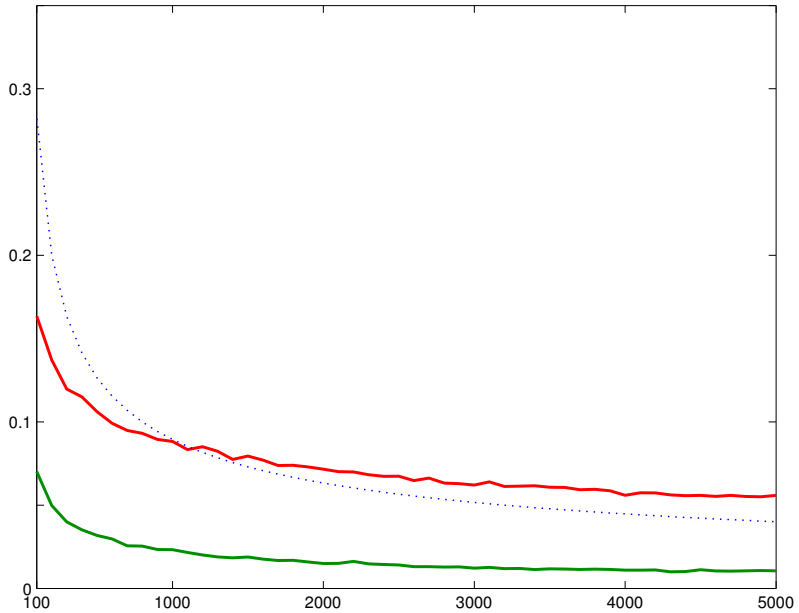
- croissantes;
- convexes;
- $\sup_{(0,1)} f(x) \leq B$

Alors

$$\sup_{f \in \mathcal{F}_B} \inf_{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,h(x)} - f| \right\} \leq \sqrt{\frac{4B}{n}}$$

Exemple





— f densité à estimer;

— f_{n,h_0} tel que $h_0 = \text{argmin}_{h>0} \int |f_{n,h} - f|$;

— $f_{n,h_0(x)}$ pour une certaine fonction $h_0(x)$.

— La borne $\sqrt{8/n}$;

— $\min_h L_1(f_{n,h})$;

— $L_1(f_{n,h_0(x)})$.

Le modèle

On considère des fenêtres de la forme

$$h(x, X_i, \theta) = \phi(x, X_i, \lambda)$$

avec

- $\lambda \in \mathbb{R}^p$
- $\lambda \to \phi(x, X_i, \lambda)$ polynomiale de degré $\leq \ell$.

Le modèle

On considère des fenêtres de la forme

$$h(x, X_i, \theta) = \sum_{j_1=1}^{r_1} \phi(x, X_i, \lambda_{j_1}) \mathbf{1}_{B_{j_1}^1}(x)$$

avec

- $\lambda_{j_1 j_2} \in \mathbb{R}^p$
- $\lambda_{j_1 j_2} \to \phi(x, X_i, \lambda_{j_1 j_2})$ polynomiale de degré $\leq \ell$.
- $P_1 = \{B_1^1, \ldots, B_{r_1}^1\} \in \mathcal{P}_1$

Le modèle

On considère des fenêtres de la forme

$$h(x, X_i, \theta) = \sum_{(j_1, j_2) \in J} \phi(x, X_i, \lambda_{j_1 j_2}) \mathbf{1}_{B^1_{j_1} \times B^2_{j_2}}(x, X_i)$$

avec

- $\lambda_{j_1 j_2} \in \mathbb{R}^p$
- $\lambda_{j_1 j_2} \to \phi(x, X_i, \lambda_{j_1 j_2})$ polynomiale de degrés $\leq \ell$.
- $P_1 = \{B^1_1, \ldots, B^1_{r_1}\} \in \mathcal{P}_1$
- $P_2 = \{B^2_1, \ldots, B^2_{r_2}\} \in \mathcal{P}_2$
- $J = \{1, \ldots, r_1\} \times \{1, \ldots, r_2\}$

Le modèle

On considère des fenêtres de la forme

$$h(x, X_i, \theta) = \sum_{(j_1, j_2) \in J} \phi(x, X_i, \lambda_{j_1 j_2}) \mathbf{1}_{B^1_{j_1} \times B^2_{j_2}}(x, X_i)$$

avec

- $\lambda_{j_1 j_2} \in \mathbb{R}^p$
- $\lambda_{j_1 j_2} \to \phi(x, X_i, \lambda_{j_1 j_2})$ polynomiale de degré $\leq \ell$.
- $P_1 = \{B^1_1, \ldots, B^1_{r_1}\} \in \mathcal{P}_1$
- $P_2 = \{B^2_1, \ldots, B^2_{r_2}\} \in \mathcal{P}_2$
- $J = \{1, \ldots, r_1\} \times \{1, \ldots, r_2\}$

La méthode combinatoire

On utilise la méthode combinatoire pour sélectionner θ dans :

$$\Theta = \left\{ (P_1, P_2, \underline{\lambda}) : P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2, \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{r_1 r_2 p} \right\}.$$

Théorème

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m) \leq \psi\big(n, m, \ell, \mathbf{S}_{\mathcal{P}}(n)\big)^{r_1 r_2 p},$$

où ψ est polynomial en ses arguments.

Corollaire

En particulier, le choix $m = n/\log n$ donne

$$\mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} \leq 5\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\right) \inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,\theta} - f| \right\} + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right).$$

La méthode combinatoire

On utilise la méthode combinatoire pour sélectionner θ dans :

$$\Theta = \left\{ (P_1, P_2, \underline{\lambda}) : P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2, \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{r_1 r_2 p} \right\}.$$

Théorème

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m) \leq \psi\big(n, m, \ell, \mathbf{S}_{\mathcal{P}}(n)\big)^{r_1 r_2 p},$$

où ψ est polynomial en ses arguments.

Corollaire

En particulier, le choix $m = n/\log n$ donne

$$\mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} \leq 5\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\right) \inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,\theta} - f| \right\} + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right).$$

La méthode combinatoire

On utilise la méthode combinatoire pour sélectionner θ dans :

$$\Theta = \left\{ (P_1, P_2, \underline{\lambda}) : P_1 \in \mathcal{P}_1, P_2 \in \mathcal{P}_2, \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^{r_1 r_2 p} \right\}.$$

Théorème

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m) \leq \psi\big(n, m, \ell, \mathbf{S}_{\mathcal{P}}(n)\big)^{r_1 r_2 p},$$

où ψ est polynomial en ses arguments.

Corollaire

En particulier, le choix $m = n/\log n$ donne

$$\mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} \leq 5\left(1 + O\Big(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\Big)\right) \inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,\theta} - f| \right\} + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right).$$

Exemples (1)

- On considère des fenêtres de la forme

$$h(x, X_i, \theta) = \sum_{(j_1, j_2) \in J} \phi(x, X_i, \lambda_{j_1 j_2}) \mathbf{1}_{B^1_{j_1} \times B^2_{j_2}}(x, X_i)$$

- Soit $\mathcal{F} = \left\{ \text{densités linéaires sur } [0,1] \right\}$.
- Soit

$$h(x, \theta) = \sum_{j=1}^{3} \phi(x, \lambda_j) \mathbf{1}_{B_j}(x)$$

où $\lambda_j = (\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda_j^3) \in \mathbb{R}^3$

- Alors

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{E} \left\{ \int |f_n - f| \right\} = O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} \right).$$

Exemples (1)

- On considère des fenêtres de la forme

$$h(x, X_i, \theta) = \sum_{(j_1, j_2) \in J} \phi(x, X_i, \lambda_{j_1 j_2}) \mathbf{1}_{B^1_{j_1} \times B^2_{j_2}}(x, X_i)$$

- Soit $\mathcal{F} = \left\{ \text{densités linéaires sur } [0,1] \right\}$.
- Soit

$$h(x, \theta) = \sum_{j=1}^{3} \phi(x, \lambda_j) \mathbf{1}_{B_j}(x)$$

où $\lambda_j = (\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda_j^3) \in \mathbb{R}^3$

- Alors

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{E} \left\{ \int |f_n - f| \right\} = O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} \right).$$

Exemples (1)

- On considère des fenêtres de la forme

$$h(x, X_i, \theta) = \sum_{(j_1, j_2) \in J} \phi(x, X_i, \lambda_{j_1 j_2}) \mathbf{1}_{B^1_{j_1} \times B^2_{j_2}}(x, X_i)$$

- Soit $\mathcal{F} = \left\{ \text{densités linéaires sur } [0,1] \right\}$.
- Soit

$$h(x, \theta) = \sum_{j=1}^{3} \phi(x, \lambda_j) \mathbf{1}_{B_j}(x)$$

où $\lambda_j = (\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda_j^3) \in \mathbb{R}^3$

- Alors

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} = O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} \right).$$

Exemples (1)

- On considère des fenêtres de la forme

$$h(x, X_i, \theta) = \sum_{(j_1, j_2) \in J} \phi(x, X_i, \lambda_{j_1 j_2}) \mathbf{1}_{B^1_{j_1} \times B^2_{j_2}}(x, X_i)$$

- Soit $\mathcal{F} = \left\{ \text{densités linéaires sur } [0,1] \right\}$.
- Soit

$$h(x, \theta) = \sum_{j=1}^{3} \phi(x, \lambda_j) \mathbf{1}_{B_j}(x)$$

où $\lambda_j = (\lambda_j^1, \lambda_j^2, \lambda_j^3) \in \mathbb{R}^3$

- Alors

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \mathbf{E} \left\{ \int |f_n - f| \right\} = O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}} \right).$$

Exemples (2)

- Fenêtre polynomiale (Biau et Devroye, 2002)

$$h(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i x^i \, .$$

L'estimateur de la distance minimum est minimax optimal pour la classe des densités à blocs décroissants.

Exemples (2)

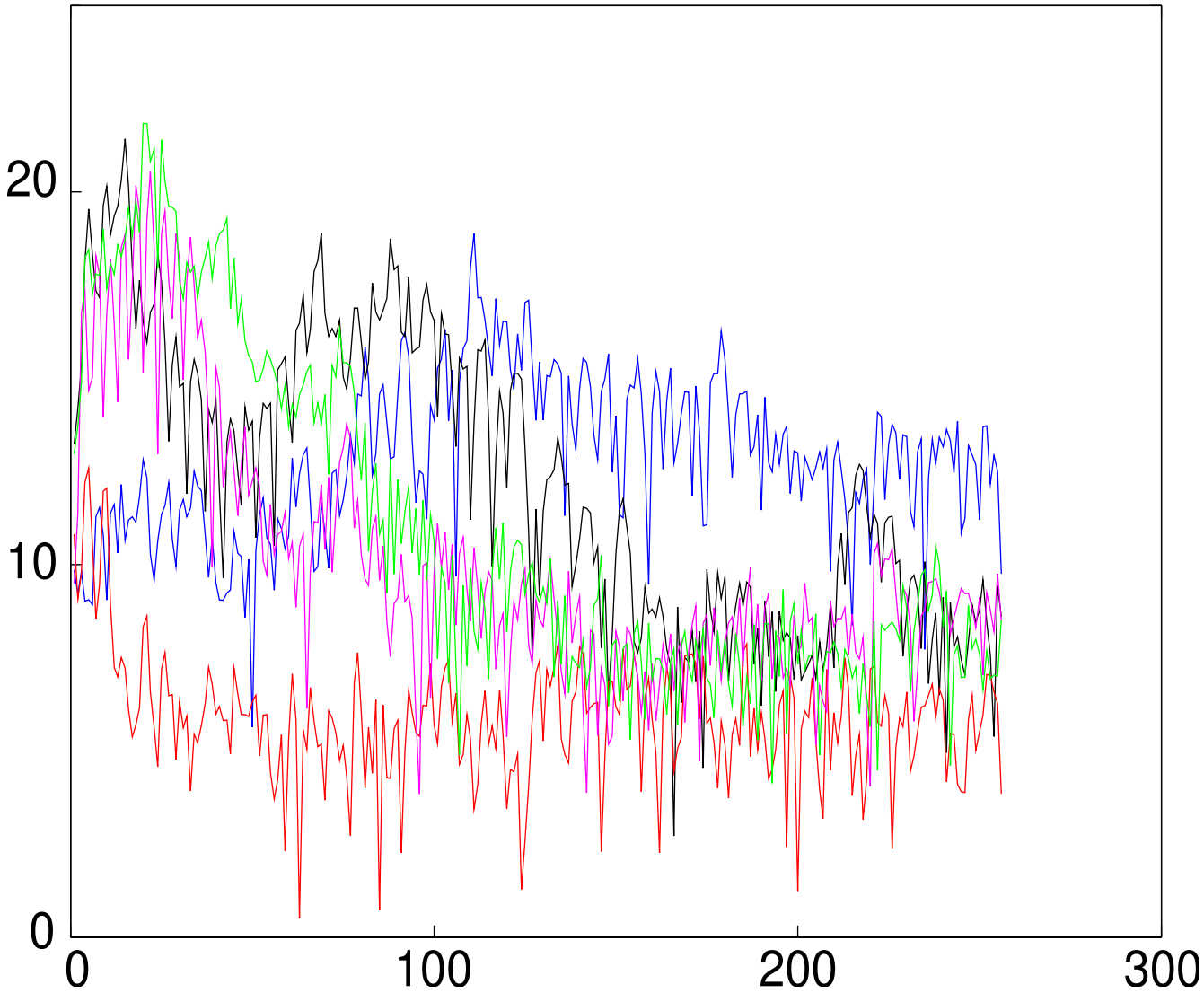
- Fenêtre polynomiale (Biau et Devroye, 2002)

$$h(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i x^i \, .$$

L'estimateur de la distance minimum est minimax optimal pour la classe des densités à blocs décroissants.

Dans de nombreux domaines de la statistique les individus prennent la forme de courbes aléatoires :

- température en un point du globe;
- cours d'une action en bourse;
- tracé d'un électrocardiogramme;
- intensité d'un son.



“sh”, “iy”, “dcl”, “ao”, “aa”.

Le modèle mathématique

- Soit $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{n+m}, Y_{n+m})$ un échantillon de copies indépendantes du couple $(X, Y) \in \mathcal{F} \times \{0, 1\}$. Le problème de la classification consiste à prédire le label inconnu Y d'une nouvelle observation X.
- Le statisticien crée une règle de classification

$$g : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$$

qui représente sa prédiction concernant le label de X.

- On définit la probabilité d'erreur pour une règle par

$$L(g) = \mathbf{P}\{g(X) \neq Y\}.$$

Le modèle mathématique

- Soit $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{n+m}, Y_{n+m})$ un échantillon de copies indépendantes du couple $(X, Y) \in \mathcal{F} \times \{0, 1\}$. Le problème de la classification consiste à prédire le label inconnu Y d'une nouvelle observation X.
- Le statisticien crée une règle de classification

$$g : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$$

qui représente sa prédiction concernant le label de X.

- On définit la probabilité d'erreur pour une règle par

$$L(g) = \mathbf{P}\{g(X) \neq Y\}.$$

Le modèle mathématique

- Soit $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{n+m}, Y_{n+m})$ un échantillon de copies indépendantes du couple $(X, Y) \in \mathcal{F} \times \{0, 1\}$. Le problème de la classification consiste à prédire le label inconnu Y d'une nouvelle observation X.
- Le statisticien crée une règle de classification

$$g : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$$

qui représente sa prédiction concernant le label de X.

- On définit la probabilité d'erreur pour une règle par

$$L(g) = \mathbf{P}\{g(X) \neq Y\}.$$

Classification

- La règle de Bayes

$$g^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{P}\{Y = 0 | X = x\} \geq \mathbf{P}\{Y = 1 | X = x\} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est optimale au sens où pour toutes règles $g : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$,

$$\mathbf{P}\{g^*(X) \neq Y\} \leq \mathbf{P}\{g(X) \neq Y\}.$$

- Le problème est alors de construire une règle raisonnable $\hat{g}$ à partir des observations $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{n+m}, Y_{n+m})$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E} L(\hat{g}) = L^* .$$

- En dimension finie : arbres, plus proches voisins, noyau...

Classification

- La règle de Bayes

$$g^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{P}\{Y = 0 | X = x\} \geq \mathbf{P}\{Y = 1 | X = x\} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est optimale au sens où pour toutes règles $g : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$,

$$\mathbf{P}\{g^*(X) \neq Y\} \leq \mathbf{P}\{g(X) \neq Y\}.$$

- Le problème est alors de construire une règle raisonnable $\hat{g}$ à partir des observations $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{n+m}, Y_{n+m})$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E} L(\hat{g}) = L^\star .$$

- En dimension finie : arbres, plus proches voisins, noyau...

Classification

- La règle de Bayes

$$g^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{P}\{Y = 0 | X = x\} \geq \mathbf{P}\{Y = 1 | X = x\} \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est optimale au sens où pour toutes règles $g : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$,

$$\mathbf{P}\{g^*(X) \neq Y\} \leq \mathbf{P}\{g(X) \neq Y\}.$$

- Le problème est alors de construire une règle raisonnable $\hat{g}$ à partir des observations $(X_1, Y_1), \ldots, (X_{n+m}, Y_{n+m})$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{E} L(\hat{g}) = L^\star .$$

- En dimension finie : arbres, plus proches voisins, noyau...

Bases d'ondelettes

- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_J \subset \ldots \subset L_2([0,1])$.

- Pour chaque niveau de résolution J, on construit une base orthonormée $\{\psi_j : j = 1, \ldots, 2^J\}$.

- La projection de X_i sur V_J s'écrit

$$\sum_{j=1}^{2^J} X_{ij}\psi_j(t).$$

Bases d'ondelettes

- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_J \subset \ldots \subset L_2([0,1])$.

- Pour chaque niveau de résolution J, on construit une base orthonormée $\{\psi_j : j = 1, \ldots, 2^J\}$.

- La projection de X_i sur V_J s'écrit

$$\sum_{j=1}^{2^J} X_{ij}\psi_j(t).$$

Bases d'ondelettes

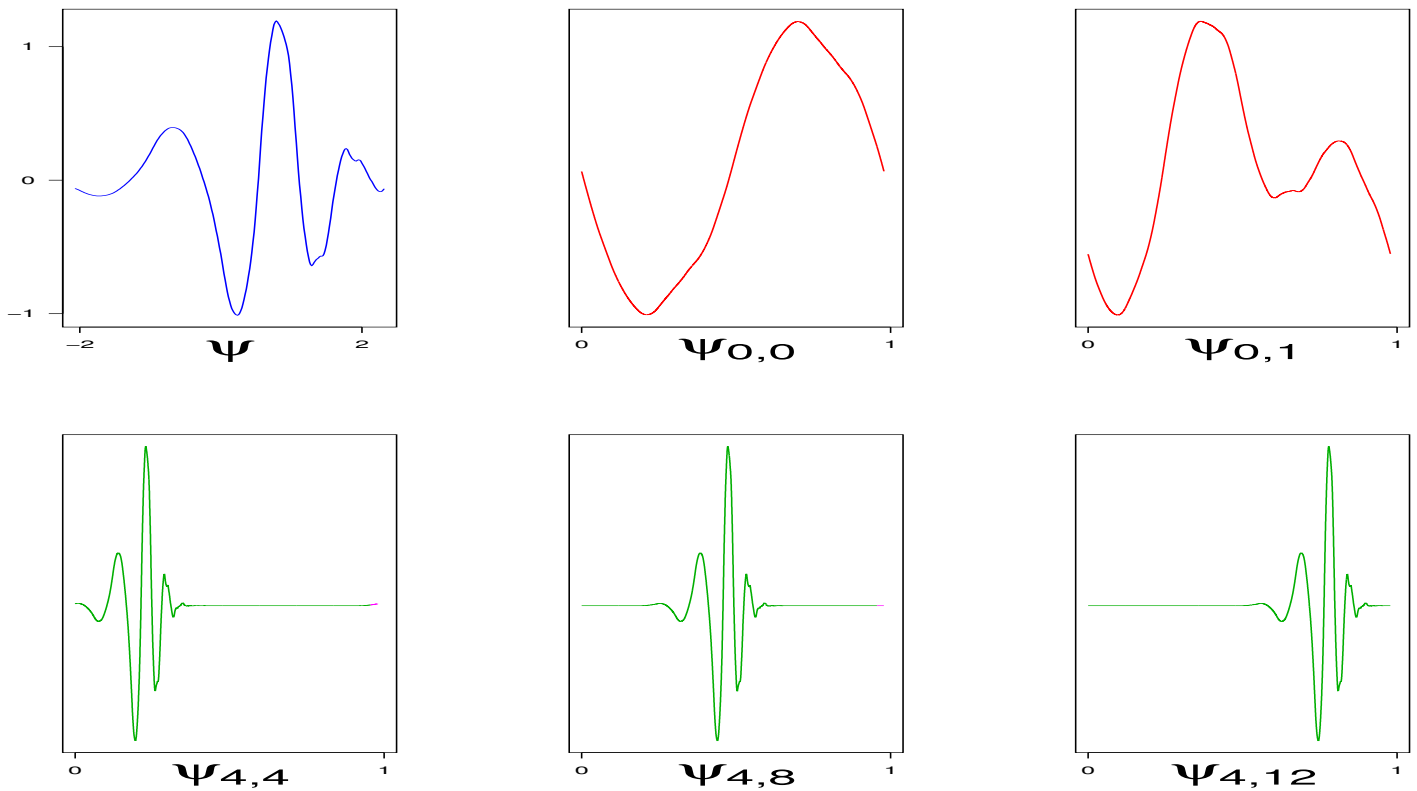
- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_J \subset \ldots \subset L_2([0,1])$.

- Pour chaque niveau de résolution J, on construit une base orthonormée $\{\psi_j : j = 1, \ldots, 2^J\}$.

- La projection de X_i sur V_J s'écrit

$$\sum_{j=1}^{2^J} X_{ij}\psi_j(t).$$

Ondelettes de Daubechies



— : ondelette mère
— : bases de W_0
— : éléments de la base de W_4.

Réduction de la dimension

- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_J \subset \ldots \subset L_2([0,1])$;
- Les observations X_i sont approchées par

$$X_i(t) \approx \sum_{j=1}^{2^J} X_{ij}\psi_j(t)\,.$$

- échantillon d'apprentissage $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$;
- échantillon test $(X_{n+1}, Y_{n+1}), \ldots, (X_{n+m}, Y_{n+m})$.

Réduction de la dimension

- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_J \subset \ldots \subset L_2([0,1])$;
- Les observations X_i sont approchées par

$$X_i(t) \approx \sum_{j=1}^{2^J} X_{ij}\psi_j(t)\,.$$

- échantillon d'apprentissage $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$;
- échantillon test $(X_{n+1}, Y_{n+1}), \ldots, (X_{n+m}, Y_{n+m})$.

Un seuillage global

- Ordonnons les 2^J fonctions $\{\psi_1, \ldots, \psi_{2^J}\}$ en $\{\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_{2^J}}\}$ suivant

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij_1}{}^2 \geq \sum_{i=1}^{n} X_{ij_2}{}^2 \geq \ldots \geq \sum_{i=1}^{n} X_{ij_{2^J}}{}^2 .$$

- Les coefficients d'ondelettes sont rangés à l'aide un seuillage global suivant la moyenne des carrés des coefficients de l'échantillon d'apprentissage.

- On notera

$$\mathbf{X}_i^{(d)} = (X_{ij_1}, \ldots, X_{ij_d}) .$$

Un seuillage global

- Ordonnons les 2^J fonctions $\{\psi_1, \ldots, \psi_{2^J}\}$ en $\{\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_{2^J}}\}$ suivant

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij_1}{}^2 \geq \sum_{i=1}^{n} X_{ij_2}{}^2 \geq \ldots \geq \sum_{i=1}^{n} X_{ij_{2^J}}{}^2 .$$

- Les coefficients d'ondelettes sont rangés à l'aide un seuillage global suivant la moyenne des carrés des coefficients de l'échantillon d'apprentissage.

- On notera

$$\mathbf{X}_i^{(d)} = (X_{ij_1}, \ldots, X_{ij_d}) .$$

Un seuillage global

- Ordonnons les 2^J fonctions $\{\psi_1, \ldots, \psi_{2^J}\}$ en $\{\psi_{j_1}, \ldots, \psi_{j_{2^J}}\}$ suivant

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij_1}{}^2 \geq \sum_{i=1}^{n} X_{ij_2}{}^2 \geq \ldots \geq \sum_{i=1}^{n} X_{ij_{2^J}}{}^2 .$$

- Les coefficients d'ondelettes sont rangés à l'aide un seuillage global suivant la moyenne des carrés des coefficients de l'échantillon d'apprentissage.

- On notera

$$\mathbf{X}_i^{(d)} = (X_{ij_1}, \ldots, X_{ij_d}) .$$

La procédure

- Pour chaque $d = 1, \ldots, 2^J$, soit $D_n^{(d)}$ une classe de règles $g^{(d)} : \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \times \{0,1\})^n \to \{0,1\}$.
- Soit $\mathbb{S}_{C_n^{(d)}}(m)$ le coefficient de pulvérisation associé à cette classe, et soit $\mathbb{S}_{C_n}^{(J)}(m)$ le coefficient de pulvérisation de toutes les règles $\{g^{(d)} : d = 1, \ldots, 2^J\}$.
- On sélectionne d et $g^{(d)}$ par minimisation de la probabilité d'erreur empirique basée sur l'échantillon de validation :

$$\left(\hat{d}, \hat{g}^{(\hat{d})}\right) = \underset{1 \leq d \leq 2^J,\, g \in D_n^{(d)}}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{m} \sum_{i=n+1}^{n+m} \mathbf{1}_{[g^{(d)}(\mathbf{X}_i^{(d)}) \neq Y_i]} \right].$$

La procédure

- Pour chaque $d = 1, \ldots, 2^J$, soit $D_n^{(d)}$ une classe de règles $g^{(d)} : \mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d \times \{0,1\})^n \to \{0,1\}$.
- Soit $\mathbb{S}_{C_n^{(d)}}(m)$ le coefficient de pulvérisation associé à cette classe, et soit $\mathbb{S}_{C_n}^{(J)}(m)$ le coefficient de pulvérisation de toutes les règles $\{g^{(d)} : d = 1, \ldots, 2^J\}$.

- On sélectionne d et $g^{(d)}$ par minimisation de la probabilité d'erreur empirique basée sur l'échantillon de validation :

$$\left(\hat{d}, \hat{g}^{(\hat{d})}\right) = \underset{1 \leq d \leq 2^J,\, g \in D_n^{(d)}}{\operatorname{argmin}} \left[\frac{1}{m} \sum_{i=n+1}^{n+m} \mathbf{1}_{[g^{(d)}(\mathbf{X}_i^{(d)}) \neq Y_i]} \right].$$

Théorème

$$\mathbf{E}\left\{L_{n+m}(\hat{g})\right\} - L^* \leq L^*_{2^J} - L^* + \mathbf{E}\left\{ \inf_{d=1,\ldots,2^J, g^{(d)} \in D_n^{(d)}} L_n(g^{(d)}) \right\} - L^*_{2^J}$$

$$+ 2\mathbf{E}\left\{ \sqrt{\frac{8 \log\left(4\mathbb{S}^{(J)}_{\mathbf{C}_n}(2m)\right)}{m}} + \frac{1}{\sqrt{(m/2)\log\left(4\mathbb{S}^{(J)}_{\mathbf{C}_n}(2m)\right)}} \right\}.$$

Corollaire

Si chaque ensemble $D_n^{(J)}$ contient une règle convergente. Si,de plus,

$$\lim_{n\to\infty} m = \infty, \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left\{ \frac{\log \mathbb{S}^{(J)}_{\mathbf{C}_n}(2m)}{m} \right\} = 0,$$

alors

$$\lim_{J\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left\{L_{n+m}(\hat{g})\right\} = L^*.$$

Théorème

$$\mathbf{E}\left\{L_{n+m}(\hat{g})\right\} - L^* \leq L^*_{2^J} - L^* + \mathbf{E}\left\{\inf_{d=1,\ldots,2^J, g^{(d)} \in D_n^{(d)}} L_n(g^{(d)})\right\} - L^*_{2^J}$$

$$+ 2\mathbf{E}\left\{\sqrt{\frac{8\log\left(4\mathbb{S}^{(J)}_{\mathbf{C}_n}(2m)\right)}{m}} + \frac{1}{\sqrt{(m/2)\log\left(4\mathbb{S}^{(J)}_{\mathbf{C}_n}(2m)\right)}}\right\}.$$

Corollaire

Si chaque ensemble $D_n^{(J)}$ contient une règle convergente. Si,de plus,

$$\lim_{n\to\infty} m = \infty, \qquad et \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left\{\frac{\log \mathbb{S}^{(J)}_{\mathbf{C}_n}(2m)}{m}\right\} = 0,$$

alors

$$\lim_{J\to\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left\{L_{n+m}(\hat{g})\right\} = L^*.$$

Illustrations

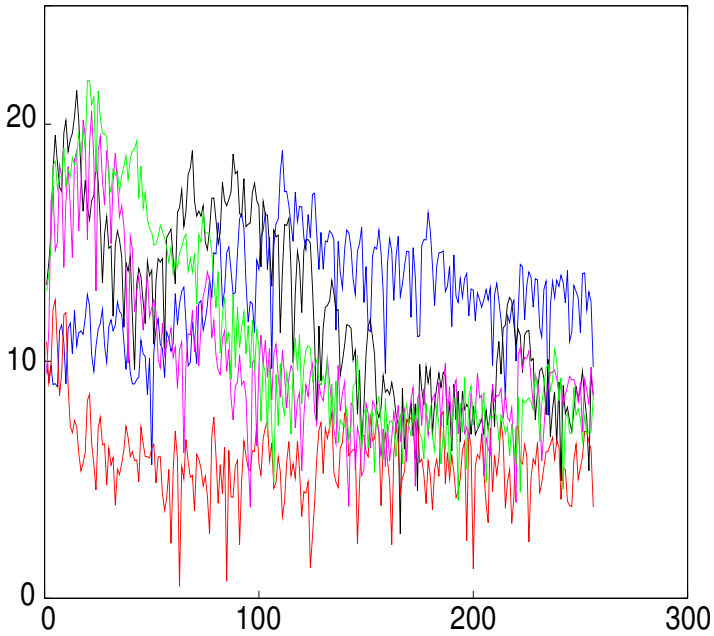
- W-QDA quand $D_n^{(d)}$ représente une “Analyse discriminante quadratique” en dimension d.
- W-NN quand $D_n^{(d)}$ contient toute les règles des kppv.
- W-T quand $D_n^{(d)}$ contient tous les arbres binaires.
- W-BOOST lorsque l’on applique l’algorithme “Adaboost” sur les coefficients sélectionnés;
- F-NN désigne une méthode basée sur les coefficients de Fourier.
- MPLSR désigne la régression PLS multivariée.

Illustrations

- W-QDA quand $D_n^{(d)}$ représente une “Analyse discriminante quadratique” en dimension d.
- W-NN quand $D_n^{(d)}$ contient toute les règles des kppv.
- W-T quand $D_n^{(d)}$ contient tous les arbres binaires.
- W-BOOST lorsque l’on applique l’algorithme “Adaboost” sur les coefficients sélectionnés;

- F-NN désigne une méthode basée sur les coefficients de Fourier.
- MPLSR désigne la régression PLS multivariée.

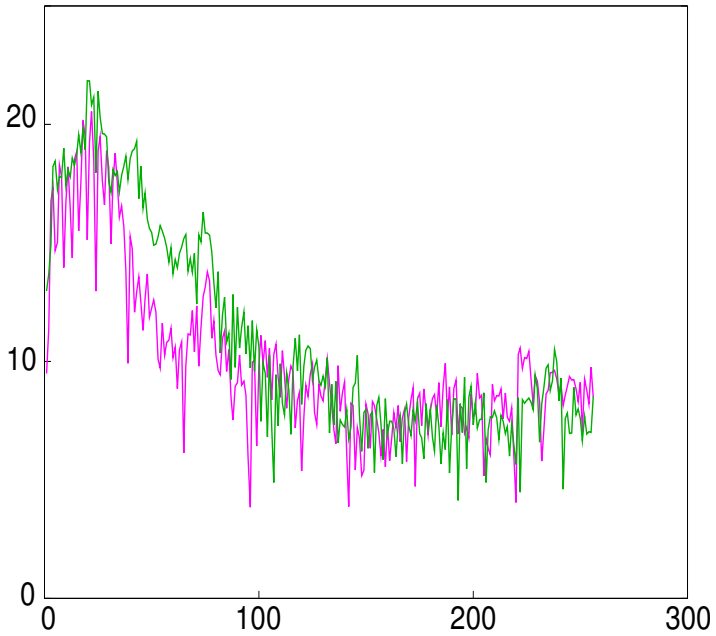
Reconnaissance vocale



“sh”, “iy”, “dcl”, “ao”, “aa”.

4509 observations, n=m=250
50 partitions

Reconnaissance vocale

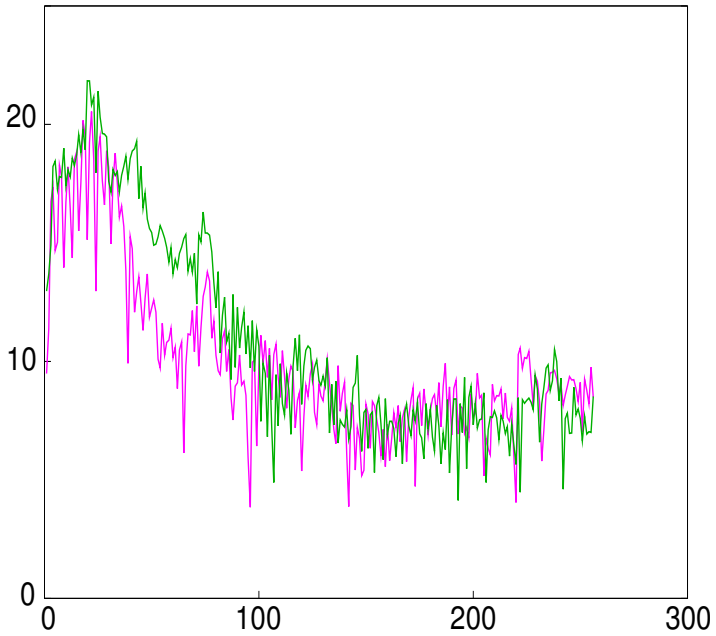


“ao”, “aa”.

1717 observations, n=m=250
50 partitions

Méthodes	**Erreurs**	$\hat{d}$
W-QDA	0.23	19
W-NN	0.21	22
W-T	0.22	9
W-BOOST	0.21	21
F-NN	0.25	42
MPLSR	0.20	5

Reconnaissance vocale

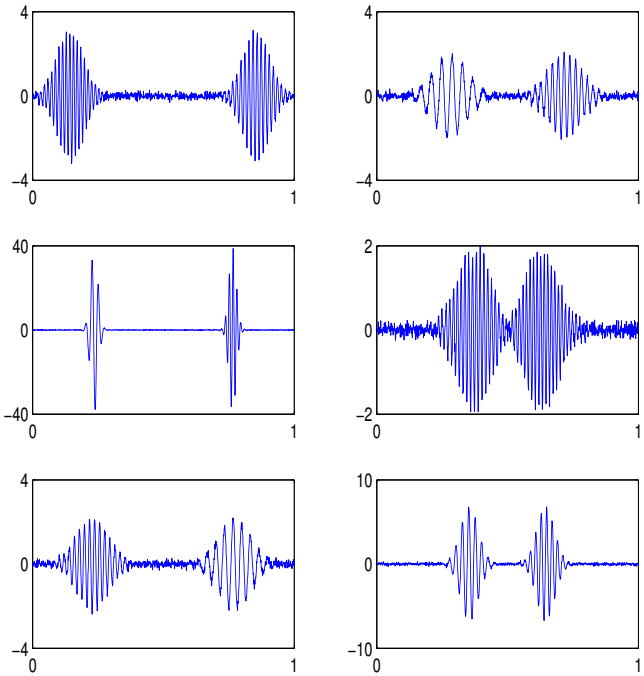


"ao", "aa".

1717 observations, n=m=250
50 partitions

Méthodes	**Erreurs**	$\hat{d}$
W-QDA	0.23	19
W-NN	0.21	22
W-T	0.22	9
W-BOOST	0.21	21
F-NN	0.25	42
MPLSR	0.20	5

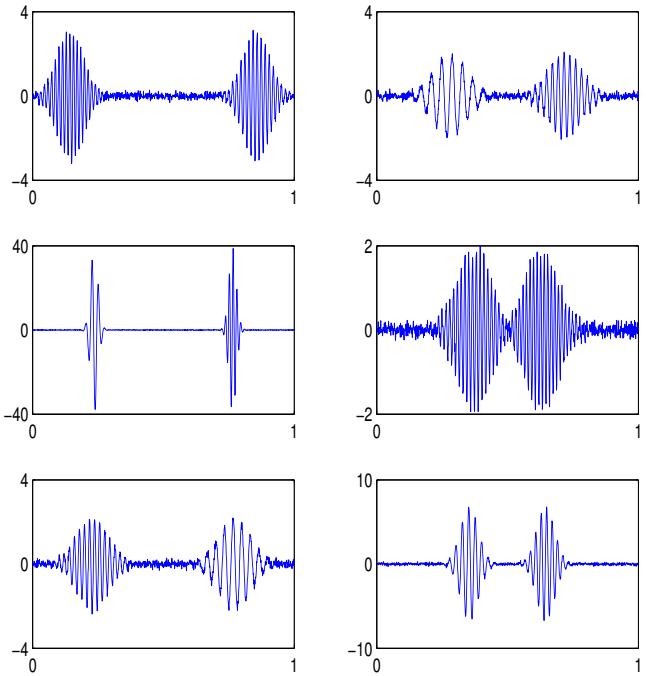
Un exemple simulé



500 observations, $n = m = 50$,
50 répétitions

Méthodes	**Erreurs**	$\hat{d}$
W-QDA	0.08	8
W-NN	0.12	24
W-T	0.13	20
W-BOOST	0.08	43
F-NN	0.35	76
MPLSR	0.44	4

Un exemple simulé



500 observations, $n = m = 50$,
50 répétitions

Méthodes	**Erreurs**	$\hat{d}$
W-QDA	0.08	8
W-NN	0.12	24
W-T	0.13	20
W-BOOST	0.08	43
F-NN	0.35	76
MPLSR	0.44	4

Les courbes sont discrétisées...

- En pratique les courbes sont observées seulement en certains points $t_p, p = 1, \ldots, \ell$.
- On n'a alors qu'une estimation des coefficients d'ondelettes

$$X_i(t) \approx \sum_{j=1}^{2^J} \bar{X}_{ij}\psi_j(t)\,, \qquad \text{avec} \qquad \bar{X}_{ij} = \frac{1}{\ell}\sum_{p=1}^{\ell} X_i(t_p)\psi_j(t_p)\,.$$

Théorème

Si $D_n^{(d)}$ est l'ensemble des règles des k-ppv et si

$$\lim_{n\to\infty} m = \infty, \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{m} = 0$$

alors la règle sélectionnée $\hat{g}$ est convergente

$$\lim_{J\to\infty} \lim_{n\to\infty} \lim_{\ell\to\infty} \mathbf{E}\{L(\hat{g})\} = L^*\,.$$

Les courbes sont discrétisées...

- En pratique les courbes sont observées seulement en certains points $t_p, p = 1, \ldots, \ell$.
- On n'a alors qu'une estimation des coefficients d'ondelettes

$$X_i(t) \approx \sum_{j=1}^{2^J} \bar{X}_{ij}\psi_j(t)\,, \qquad \text{avec} \qquad \bar{X}_{ij} = \frac{1}{\ell}\sum_{p=1}^{\ell} X_i(t_p)\psi_j(t_p)\,.$$

Théorème

Si $D_n^{(d)}$ est l'ensemble des règles des k-ppv et si

$$\lim_{n\to\infty} m = \infty, \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{m} = 0$$

alors la règle sélectionnée $\hat{g}$ est convergente

$$\lim_{J\to\infty} \lim_{n\to\infty} \lim_{\ell\to\infty} \mathbf{E}\{L(\hat{g})\} = L^*\,.$$

Les courbes sont discrétisées...

- En pratique les courbes sont observées seulement en certains points $t_p, p = 1, \ldots, \ell$.
- On n'a alors qu'une estimation des coefficients d'ondelettes

$$X_i(t) \approx \sum_{j=1}^{2^J} \bar{X}_{ij}\psi_j(t)\,, \qquad \text{avec} \qquad \bar{X}_{ij} = \frac{1}{\ell}\sum_{p=1}^{\ell} X_i(t_p)\psi_j(t_p)\,.$$

Théorème

Si $D_n^{(d)}$ est l'ensemble des règles des k-ppv et si

$$\lim_{n\to\infty} m = \infty, \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{m} = 0$$

alors la règle sélectionnée $\hat{g}$ est convergente

$$\lim_{J\to\infty} \lim_{n\to\infty} \lim_{\ell\to\infty} \mathbf{E}\{L(\hat{g})\} = L^*\,.$$

Vitesses “optimales”

Etant donné $\mathcal{C}$ une classe de règles, on a

$$\mathbf{E}L(g_n^\star) - L_\mathcal{C} \leq O\left(\sqrt{\frac{L_\mathcal{C} V_\mathcal{C} \log n}{n}} + \frac{V_\mathcal{C} \log n}{n}\right)$$

où $L_\mathcal{C} = \inf_{g \in \mathcal{C}} L(g)$.

On obtient des résultats “plus fins” à l’aide d’hypothèses sur la fonction de régression η du style :

$$\mathbf{P}\left(|\eta(X) - \frac{1}{2}| \leq u\right) \leq Cu^\alpha, \quad \forall u > 0.$$

Minimisation de risque convexe

- Etant donné $\mathcal{C}$ une classe de règles, on minimise

$$A_n(g) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(-g(X_i) Y_i) \,,$$

où ϕ est une fonction convexe, positive et croissante ($\phi(x) = e^x$).

$$L(g_n) - L^\star \leq \psi\Big(\inf_{g \in \mathcal{C}} A(g) - A^\star \Big)$$

où

$$A(g) = \mathbf{E}\big\{\phi(-g(X)Y)\big\} \qquad \text{et} \qquad A^\star = \inf_{g \in \mathcal{C}} A(g) \,.$$

- Voir Bousquet, Boucheron et Lugosi (2005).

Minimisation de risque convexe

- Etant donné $\mathcal{C}$ une classe de règles, on minimise

$$A_n(g) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \phi(-g(X_i)\,Y_i)\,,$$

où ϕ est une fonction convexe, positive et croissante ($\phi(x) = e^x$).

$$L(g_n) - L^\star \leq \psi\Big(\inf_{g\in\mathcal{C}} A(g) - A^\star\Big)$$

où

$$A(g) = \mathbf{E}\big\{\phi(-g(X)\,Y)\big\} \qquad \text{et} \qquad A^\star = \inf_{g\in\mathcal{C}} A(g)\,.$$

- Voir Bousquet, Boucheron et Lugosi (2005).

Boosting (1)

Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\gamma_m \in S \subset \mathbb{R}^d$. On note $b(x, \gamma_m) =< x, \gamma_m >$.

Algorithme

1. Initialise $f_0(x) = 0$;
2. Pour m de 1 à M
   a) Calcule

$$(\beta_m, \gamma_m) = \underset{\beta,\gamma}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^{n} \phi(y_i, f_{m-1}(x_i) + \beta b(x_i, \gamma));$$

   b) Calcule $f_m(x) = f_{m-1}(x) + \beta_m b(x, \gamma_m)$;
3. Sortie $f_M(x)$.

$\phi(x) = \exp(x)$ est la fonction de risque.

Boosting (2)

- **Idée :** Combiner des règles simples;
- Adaboost : combinaison de règles linéaires de la forme :

$$g_i(\mathbf{x}) = 1 \qquad si \qquad x^j > \lambda_i.$$

1. Initialisation des poids des observations : $w_i = 1/n$;
2. Pour m de 1 à M :
   a) applique la règle g_i à l'échantillon d'apprentissage pondéré;
   b) Calcule

$$err_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \mathbf{1}_{(y_i \neq g_m(x_i))}}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \qquad \alpha_m = \log((1 - err_m)/err_m);$$

   c) affecte $w_i < -w_i \exp(\alpha_m \mathbf{1}_{(y_i \neq g_m(x_i))})$
3. Sortie :$G(x) = sign\left(\sum_{m=1}^{M} \alpha_m g_m(x)\right)$.

Arbres

- K labels;
- un noeud m définit une région R_m. Soit $\hat{p}_{m,k}$ la proportion de k dans la région R_m.
- Les noeuds sont choisis en minimisant l'indice de Gini:

$$\sum_{k \neq k'} \hat{p}_{m,k} \hat{p}_{m,k'} = \sum_{k=1}^{K} \hat{p}_{m,k}(1 - \hat{p}_{m,k}) \, .$$

ϕ-divergence

$$D_\phi(f, f_n) = \int f_n \phi\left(\frac{f}{f_n}\right), \qquad \phi \text{ convexe.}$$

Test : $\mu = \mu_0$ *vs* $\mu \neq \mu_0$.

- $\phi(t) = (t-1)^2 \rightarrow$ Pearson;
- $\phi(t) = 1/2(1/t + t - 2) \rightarrow$ Neyman;
- Statistique du rapport des vraisemblances :

$$T_n = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_n(A_i) \log \frac{\mu_n(A_i)}{\mu_0(A_i)};$$

- Modification de la statistique.
  $\rightarrow T_n^\star$ entropie réciproque relative, et μ_n associé à l'histogramme modifié f_n.

ϕ-divergence

$$D_\phi(f, f_n) = \int f_n \phi\left(\frac{f}{f_n}\right), \qquad \phi \text{ convexe.}$$

Test : $\mu = \mu_0$ *vs* $\mu \neq \mu_0$.

- $\phi(t) = (t-1)^2 \rightarrow$ Pearson;
- $\phi(t) = 1/2(1/t + t - 2) \rightarrow$ Neyman;
- Statistique du rapport des vraisemblances :

$$T_n = \sum_{i=1}^{\ell} \mu_n(A_i) \log \frac{\mu_n(A_i)}{\mu_0(A_i)};$$

- Modification de la statistique.
  $\rightarrow T_n^\star$ entropie réciproque relative, et μ_n associé à l'histogramme modifié f_n.

Lemme

Denote by μ the common distribution of the X_i's, and suppose that there exists a positive real number α such that $\forall \theta \in \Theta$ $\big(\theta = (P, g), P = \{A_1, \ldots, A_\ell\}\big)$

$$\alpha \leq \mu(A_i)\,, \qquad i = 1, \ldots, \ell.$$

Introduce

$$J_{n,\theta} = \int |f_{n,\theta} - f|\,.$$

If m is a positive integer such that $2m \leq n$, then

$$\frac{\inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\big\{J_{n-m,\theta}\big\}}{\inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\big\{J_{n,\theta}\big\}} \leq 1 + \frac{2m}{n-m} + 8\sqrt{\frac{m}{n}} + \frac{\sqrt{8}\,mr}{(n-m)\sqrt{n}\,\alpha(1-\alpha)}\,.$$

Minimax

- Risque minimax :

$$\mathcal{R}(g_n, \mathcal{F}) = \sup_{f \in \mathcal{F}_B} \mathbf{E}\left\{ \int |g_n - f| \right\};$$

- f_n est minimax optimal si

$$\mathcal{R}(f_n, \mathcal{F}) \leq C \inf_{g_n} \mathcal{R}(g_n, \mathcal{F});$$

- Si
  1. $\mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} \leq C_1 \inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,\theta} - f| \right\} + r_n$;
  2. r_n tend vers 0 plus vite que $\inf_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,\theta} - f| \right\}$;
  3. $\{f_n n, \theta\}$ contient un estimateur minimax optimal pour $\mathcal{F}$;

  alors f_n est minimax optimal.

Soit $\mathcal{F}_B$ la classe des densités définies sur $[0,1]$

- croissantes;
- convexes;
- $\sup_{(0,1)} f(x) \leq B$.

Alors

$$\inf_{H:\mathbb{R}^{n+1}\to(0,\infty)} \sup_{f\in\mathcal{F}_B} \frac{\mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,H(x)}(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \right\}}{\inf_{h:\mathbb{R}\to(0,\infty)} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n,h(x)}(x) - f(x)| \, \mathrm{d}x \right\}} \geq C n^{\frac{1}{10}} .$$

Théorème

Théorème (Anthony et Bartlett, 1999)

Soit h une fonction de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^n$ dans $\{0,1\}$ et soit

$$H = \left\{ x \mapsto h(a,x) : a \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

Supposons que h puisse être calculé à partir d'un algorithme prenant la paire (a,x) en entré et en fournissant $h(a,x)$ en sortie en au plus t des opérations:

- *exponentielle; arithmétique (+,-,*,/); "comparatives" : >,<,=...; sortie 0 ou 1.*

Alors le vecteur

$$\left(\mathbf{1}_{h(a,y_1)>0}, \ldots, \mathbf{1}_{h(a,y_m)>0} \right)$$

lorsque a varie dans $\mathbb{R}^d$ peut prendre au plus

$$C(m,d)2^{dt}$$

Eléments de preuve

- On souhaite borner

$$Card\left\{\{\mathbf{1}_{[y_1\in A_{\theta,\theta'}]},\ldots,\mathbf{1}_{[y_m\in A_{\theta,\theta'}]}\}:(\theta,\theta')\in\Theta^2\right\}$$

où $A_{\theta,\theta'}=\{x:f_{n-m,\theta}(x)>f_{n-m,\theta'}(x)\}$.

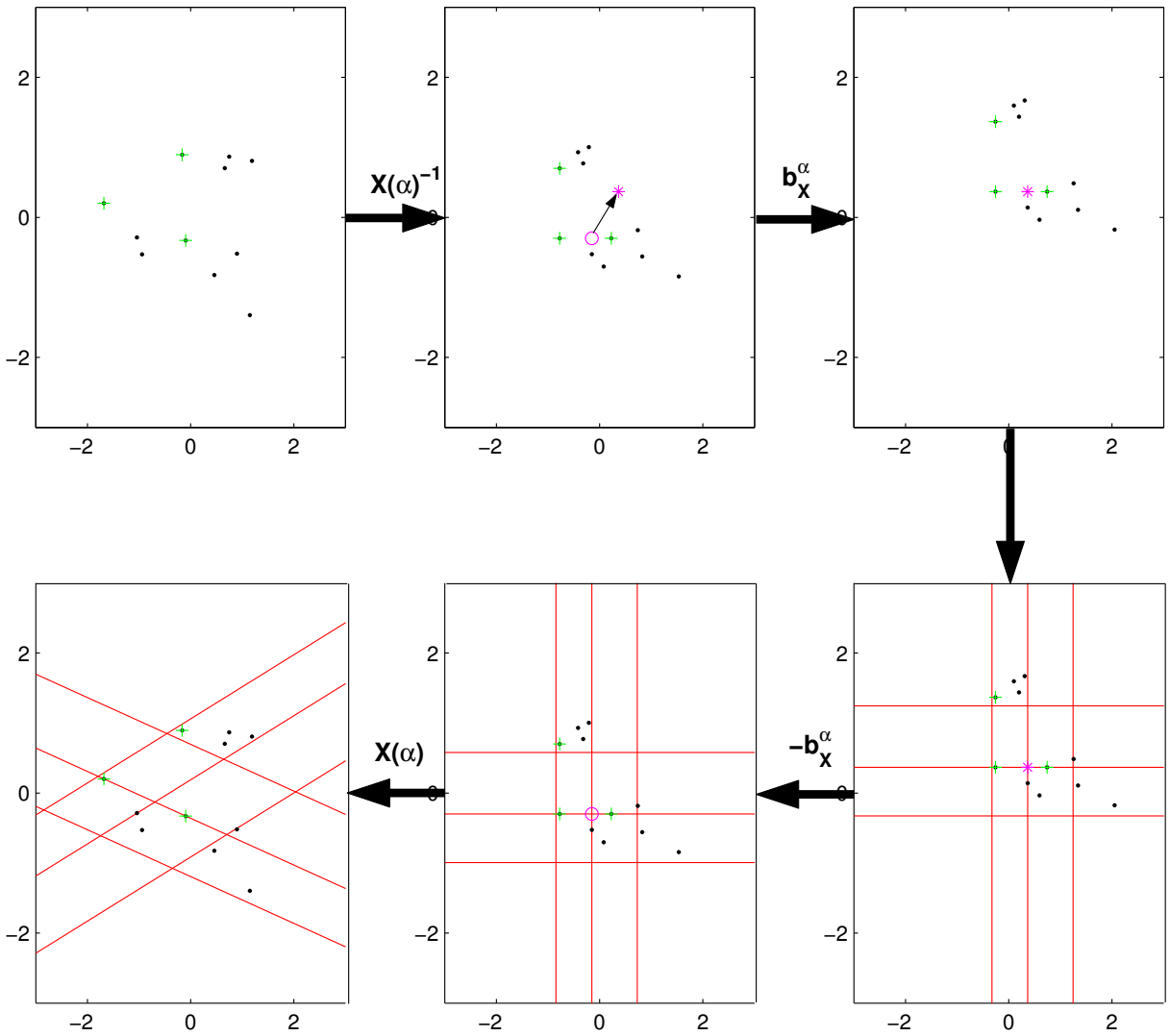
- On cherche un sous-ensemble de cardinal fini $\mathcal{W}$ de Θ^2 de manière à pouvoir borner

$$Card\left\{\{\mathbf{1}_{[y_1\in A_{\theta,\theta'}]},\ldots,\mathbf{1}_{[y_m\in A_{\theta,\theta'}]}\}:(\theta,\theta')\in\mathcal{W}^2\right\}\leq M.$$

- On conclut

$$Card\left\{\{\mathbf{1}_{[y_1\in A_{\theta,\theta'}]},\ldots,\mathbf{1}_{[y_m\in A_{\theta,\theta'}]}\}:(\theta,\theta')\in\Theta^2\right\}\leq MCard\mathcal{W}.$$

Transformation-Retransformation



Lien avec la théorie de VC (1)

- Etant donné une classe d'ensembles $\mathcal{A}$, on définit le coefficient de pulvérisation $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p)$ par

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) = \max_{x_1,\ldots,x_p \in \mathbb{R}^d} \text{Card}\left\{\{x_1,\ldots,x_p\} \cap A : A \in \mathcal{A}\right\}.$$

- On a toujours $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) \leq 2^p$. La dimension de Vapnik-Chervonenkis $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ de la classe $\mathcal{A}$ est alors définie comme le plus grand entier p tel que

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) = 2^p.$$

Lemme (Sauer (1972))

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) \leq (p+1)^{\mathcal{V}_{\mathcal{A}}}.$$

Lien avec la théorie de VC (1)

- Etant donné une classe d'ensembles $\mathcal{A}$, on définit le coefficient de pulvérisation $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p)$ par

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) = \max_{x_1,\ldots,x_p \in \mathbb{R}^d} \text{Card}\left\{\{x_1,\ldots,x_p\} \cap A : A \in \mathcal{A}\right\}.$$

- On a toujours $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) \leq 2^p$. La dimension de Vapnik-Chervonenkis $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ de la classe $\mathcal{A}$ est alors définie comme le plus grand entier p tel que

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) = 2^p.$$

Lemme (Sauer (1972))

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) \leq (p+1)^{\mathcal{V}_{\mathcal{A}}}.$$

Lien avec la théorie de VC (1)

- Etant donné une classe d'ensembles $\mathcal{A}$, on définit le coefficient de pulvérisation $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p)$ par

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) = \max_{x_1,\ldots,x_p \in \mathbb{R}^d} \text{Card}\left\{\{x_1,\ldots,x_p\} \cap A : A \in \mathcal{A}\right\}.$$

- On a toujours $\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) \leq 2^p$. La dimension de Vapnik-Chervonenkis $\mathcal{V}_{\mathcal{A}}$ de la classe $\mathcal{A}$ est alors définie comme le plus grand entier p tel que

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) = 2^p.$$

Lemme (Sauer (1972))

$$\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(p) \leq (p+1)^{\mathcal{V}_{\mathcal{A}}}.$$

Lien avec la théorie de VC (2)

$$\mathbf{E}\left\{ \sup_{A\in\mathcal{A}} \left| \int_A f - \mu_n(A) \right| \right\} \leq 2\mathbf{E}\left\{ \sqrt{\frac{\log 2\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(n)}{n}} \right\}.$$

L'inégalité oracle devient :

$$\mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} \leq 3 \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n-m,\theta} - f| \right\} + 8\,\mathbf{E}\left\{ \sqrt{\frac{\log 2\,\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m)}{m}} \right\} + \frac{3}{n}.$$

Lien avec la théorie de VC (2)

$$\mathbf{E}\left\{ \sup_{A\in\mathcal{A}} \left| \int_A f - \mu_n(A) \right| \right\} \leq 2\mathbf{E}\left\{ \sqrt{\frac{\log 2\mathbf{S}_{\mathcal{A}}(n)}{n}} \right\}.$$

L'inégalité oracle devient :

$$\mathbf{E}\left\{ \int |f_n - f| \right\} \leq 3 \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{ \int |f_{n-m,\theta} - f| \right\} + 8\,\mathbf{E}\left\{ \sqrt{\frac{\log 2\,\mathbf{S}_{\mathcal{A}_\Theta}(m)}{m}} \right\} + \frac{3}{n}.$$

Bases d'ondelettes

- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset L_2([0,1])$.
- ϕ: l'ondelette père telle que $\{\phi_{j,k} : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$ est une base orthonormée de V_j.
- Pour chaque j, on construit une base orthonormée $\{\psi_{j,k} : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$ de W_j tel que $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$. ψ est l'ondelette mère.
- Chaque fonction $X_i \in L_2([0,1])$ s'écrit

$$X_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k}^i \psi_{j,k}(t) + \eta^i \phi_{0,0}(t)\,.$$

Bases d'ondelettes

- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset L_2([0,1])$.
- ϕ: l'ondelette père telle que $\{\phi_{j,k} : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$ est une base orthonormée de V_j.
- Pour chaque j, on construit une base orthonormée $\{\psi_{j,k} : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$ de W_j tel que $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$. ψ est l'ondelette mère.
- Chaque fonction $X_i \in L_2([0,1])$ s'écrit

$$X_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k}^i \psi_{j,k}(t) + \eta^i \phi_{0,0}(t) .$$

Bases d'ondelettes

- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset L_2([0,1])$.
- ϕ: l'ondelette père telle que $\{\phi_{j,k} : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$ est une base orthonormée de V_j.
- Pour chaque j, on construit une base orthonormée $\{\psi_{j,k} : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$ de W_j tel que $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$. ψ est l'ondelette mère.
- Chaque fonction $X_i \in L_2([0,1])$ s'écrit

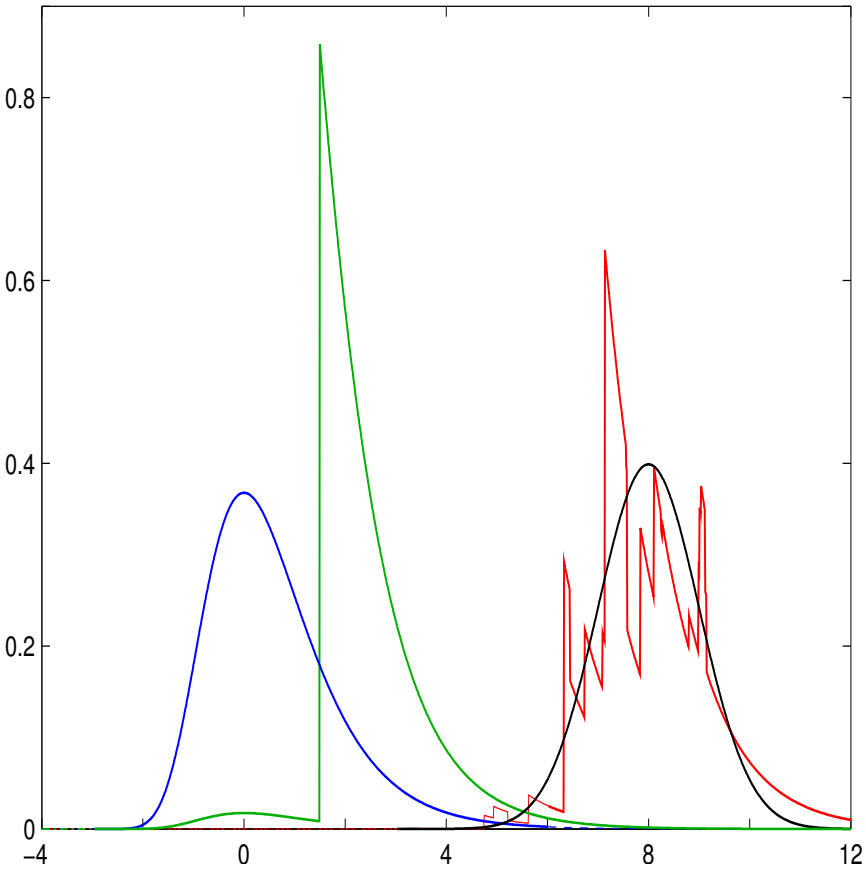
$$X_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k}^i \psi_{j,k}(t) + \eta^i \phi_{0,0}(t) .$$

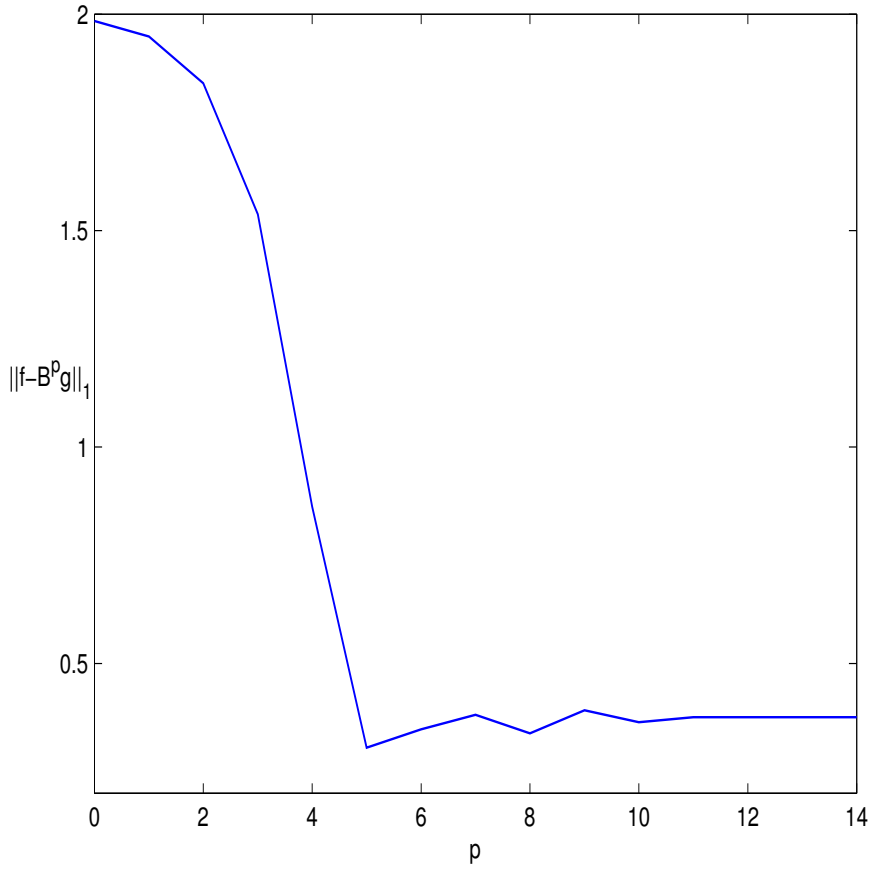
Bases d'ondelettes

- $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset L_2\big([0,1]\big)$.
- ϕ: l'ondelette père telle que $\{\phi_{j,k} : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$ est une base orthonormée de V_j.
- Pour chaque j, on construit une base orthonormée $\{\psi_{j,k} : k = 0, \ldots, 2^j - 1\}$ de W_j tel que $V_{j+1} = V_j \bigoplus W_j$. ψ est l'ondelette mère.
- Chaque fonction $X_i \in L_2\big([0,1]\big)$ s'écrit

$$X_i(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2^j-1} \xi_{j,k}^i \psi_{j,k}(t) + \eta^i \phi_{0,0}(t)\,.$$

Une première application





— f densité à estimer;
— densité de référence;
— premier itéré;
— densité stationnaire.

Inégalité oracle

Corollaire

$$\mathbf{E}\left\{\int |f_n - f|\right\} \leq 5\left(1 + \frac{2m}{n-m} + 8\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n,\theta} - f|\right\} + 8\sqrt{\frac{\log 2 + r_1 r_2 p \log \psi\left(n, m, \ell, \mathbf{S}_{\mathcal{P}}(n)\right)}{m}} + \frac{5}{n}.$$

En particulier si r_k, p et ℓ sont fixés, alors le choix $m = n/\log n$ donne

$$\mathbf{E}\left\{\int |f_n - f|\right\} \leq 5\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\right) \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n,\theta} - f|\right\} + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right).$$

Inégalité oracle

Corollaire

$$\mathbf{E}\left\{\int |f_n - f|\right\} \leq 5\left(1 + \frac{2m}{n-m} + 8\sqrt{\frac{m}{n}}\right) \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n,\theta} - f|\right\} + 8\sqrt{\frac{\log 2 + r_1 r_2 p \log \psi\left(n, m, \ell, \mathbf{S}_{\mathcal{P}}(n)\right)}{m}} + \frac{5}{n}.$$

En particulier si r_k, p et ℓ sont fixés, alors le choix $m = n/\log n$ donne

$$\mathbf{E}\left\{\int |f_n - f|\right\} \leq 5\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log n}}\right)\right) \inf_{\theta\in\Theta} \mathbf{E}\left\{\int |f_{n,\theta} - f|\right\} + O\left(\frac{\log n}{\sqrt{n}}\right).$$