Mesures de prédiction

Soit X une chaîne de Markov telle que $X_n \in E_n$ de transitions $(M_n)_n$ et une suite $(G_n)_n$ de fonctions mesurables à valeurs dans $]0,1]$.

Prédiction non normalisée : pour toute fonction $f_n \in \mathcal{B}_b(E_n)$,

$$\gamma_n(f_n) := \mathbb{E}_\mu\left(f_n(X_n)\prod_{p=0}^{n-1} G_p(X_p)\right)$$

Prédiction normalisée : pour toute fonction $f_n \in \mathcal{B}_b(E_n)$,

$$\eta_n(f_n) := \frac{\gamma_n(f_n)}{\gamma_n(1)}.$$

Attention : $\eta_n(E_n) = 1$ mais $\gamma_n(E_n) = \gamma_{n-1}(G_{n-1}) \leq 1$.

Structure de récurrence à deux pas

$$\eta_n \in \mathcal{P}(E_n) \xrightarrow{\text{correction}} \widehat{\eta}_n \in \mathcal{P}(E_n) \xrightarrow{\text{prédiction}} \eta_{n+1} \in \mathcal{P}(E_{n+1}).$$

Correction (étape non linéaire) :

$$\widehat{\eta}_n = \Psi_n(\eta_n) \quad \text{avec} \quad \Psi_n(\eta)(dx) = \frac{G_n(x)}{\eta(G_n)}\eta(dx)$$

Prédiction (étape linéaire) :

$$\eta_{n+1} = \widehat{\eta}_n M_{n+1}.$$

Synthèse :

$$\boxed{\eta_{n+1} = \Phi_{n+1}(\eta_n) \quad \text{avec} \quad \Phi_{n+1}(\mu)(f) = \frac{\mu(G_n M_{n+1}(f))}{\mu(G_n)}.}$$

Processus non linéaire

Ré-interprétation de Φ_n :

$$\eta_{n+1} = \Phi_{n+1}(\eta_n) = \eta_n K_{n+1,\eta_n} \quad \text{avec} \quad K_{n+1,\eta} = S_{n,\eta} M_{n+1}.$$

Exemple de choix :

$$S_{n,\eta}(x_n, dy_n) = \varepsilon_n G_n(x_n) \delta_{x_n}(dy_n) + (1 - \varepsilon_n G_n(x_n)) \Psi_n(\eta)(dy_n),$$

tant que $\varepsilon_n G_n \leq 1$.

Récurrence sur les lois :

$$\eta_n \xrightarrow{S_{n,\eta_n}} \widehat{\eta}_n = \eta_n S_{n,\eta_n} \xrightarrow{M_{n+1}} \eta_{n+1} = \widehat{\eta}_n M_{n+1}.$$

Dynamique sur le processus :

$$X_n \xrightarrow{\text{saut autoguidé}} \widehat{X}_n \xrightarrow{\text{exploration}} X_{n+1}.$$

Système de particules

Définition :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^N_{\eta_0}(\xi_{n+1} \in dx_{n+1} | \xi_n) &:= \prod_{p=1}^{N} K_{n+1,m(\xi_n)}(\xi_n^p, dx_{n+1}^p) \\ &= \prod_{p=1}^{N} (S_{n,m(\xi_n)} M_{n+1})(\xi_n^p, dx_{n+1}^p),\end{aligned}$$

avec $m(\xi_n) := \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{p=1}^{N} \delta_{\xi_n^p} = \eta_n^N$.

Évolution en deux étapes : $\quad \xi_n \xrightarrow{\text{sélection}} \widehat{\xi}_n \xrightarrow{\text{mutation}} \xi_{n+1}$.

Remarque fondamentale :

$$\boxed{\mathbb{E}\big(\eta_{n+1}^N(f_{n+1}) | \xi_n\big) = \Phi_{n+1}\big(\eta_n^N\big)(f_{n+1}).}$$