

LE MASTER MENTION « MATHÉMATIQUES »

PRÉSENTATION

Le diplôme de master Sciences, technologies, santé, mention mathématiques, est le deuxième grade universitaire à reconnaissance européenne de l'université de Rennes 1. Il sanctionne une compétence spécialisée en mathématiques et applications. Il correspond à 4 semestres d'études après la licence mention mathématiques.

Pour les étudiants qui le souhaitent, la première année permet l'obtention du diplôme de maîtrise et d'acquérir les bases nécessaires à la préparation du concours de l'agrégation de mathématiques. L'année de préparation au concours peut s'intercaler entre les deux années du master.

Le cursus est semestrialisé, avec une place réservée pour l'acquisition de vraies compétences dans d'autres disciplines et pour l'apprentissage des langues étrangères. Il est conçu pour favoriser la réussite. Des semestres dans une université étrangère sont proposés à tout étudiant qui désire acquérir une expérience internationale.

Les modules acquis sont capitalisables et transférables. Le diplôme est aussi accessible en formation continue et en reprise d'études ; un ou plusieurs semestres peuvent alors être validés par des acquis de l'expérience professionnelle.

Les modules de ce master peuvent aussi valider d'autres formations, par exemple

- le diplôme de master STS, mention *Économétrie, statistiques* de l'université de Rennes 1 ;
- le diplôme d'université magistère modélisation, mathématiques et méthodes informatiques codéveloppé avec l'ENS Cachan.

SPÉCIALITÉS

Le master propose trois spécialités :

- mathématiques ;
- mathématiques de la modélisation, calcul scientifique ;
- mathématiques de l'information, cryptographie.

L'objectif de la spécialité **Mathématiques** est de donner une formation de base en mathématiques (concepts fondamentaux et applications) pour la recherche et par la recherche. Cette formation permet d'acquérir une culture de haut niveau en mathématiques avec un début de spécialisation (dans l'un des trois parcours proposés au second semestre : algèbre et géométrie, analyse et applications, probabilités et statistiques), afin de préparer ensuite dans d'excellentes conditions une thèse en mathématiques ou d'intégrer, comme ingénieur de recherche, des équipes et laboratoires spécialisés dans les applications des mathématiques.

Les deux autres spécialités **Mathématiques de la modélisation, calcul scientifique** et **Mathématiques de l'information, cryptographie** sont appliquées et ont pour objectif de former des ingénieurs mathématiciens spécialisés dans l'utilisation de techniques mathématiques de pointe (modélisation et simulation mathématique de phénomènes physiques, mécaniques, biologiques,... ; cryptographie, codes correcteurs) et en informatique scientifique. Ces deux spécialités offrent de nombreux débouchés professionnels. Elles permettent aussi la préparation d'une thèse à caractère appliqué dans les domaines concernés.

Pour permettre aux étudiants d'affiner progressivement leurs choix d'études, la première année du master propose deux parcours :

- Le parcours **Mathématiques fondamentales** est destiné aux étudiants se destinant prioritairement vers la spécialité **Mathématiques** de la seconde année, voire aux étudiants visant la préparation de l'agrégation.
- Le parcours **Mathématiques appliquées** est destiné aux étudiants se destinant prioritairement vers les métiers d'ingénieur mathématicien, aussi bien dans la spécialité **Mathématiques de la modélisation, calcul scientifique** que dans la spécialité **Mathématiques de l'information, cryptographie**.

ORGANISATION DE LA PREMIÈRE ANNÉE

CALENDRIER

L'année est organisée en deux semestres de 12 semaines de cours chacun.

Enseignements du premier semestre

- semaine de rentrée : 1^{er} au 5 septembre 2008 ;
- premier semestre : 8 septembre 2008 au 5 décembre 2008 ;
- vacances de Toussaint : 27 octobre 2008 au 3 novembre 2008 ;
- session d'examens : 11 décembre au 19 décembre 2008 ;
- vacances de Noël : 19 décembre 2008 au 5 janvier 2009.

Inter-semestre

- travail d'étude et de recherche (TER) ;
- réunion d'organisation et inscription définitive aux modules du second semestre ;
- conférences, information sur les métiers des mathématiques ;
- jury d'admission du premier semestre.

Enseignements du premier semestre

- second semestre : 5 janvier au 3 avril 2009 ;
- vacances d'hiver : 13 février au 23 février 2009 ;
- vacances de printemps : 10 avril au 20 avril 2009 ;
- session d'examens : 21 avril au 7 mai 2009 ;
- soutenance des TER ;
- jury d'admission du second semestre.

Seconde session d'examens

- examens du 8 juin au 26 juin 2009 ;
- jury d'admission en seconde session.

CHOIX DES MODULES (PREMIÈRE ANNÉE)

Pour chacun des deux semestres, l'étudiant choisit un certain nombre d'unités d'enseignements parmi celles proposées de sorte à totaliser 30 crédits ECTS (par semestre). Il doit aussi suivre un cours de **Langue vivante** (3 crédits) et réaliser un **Travail d'étude et de recherche** (TER) ou un stage comptant également pour 3 crédits. Dans la limite de 12 crédits ECTS, il est possible de choisir des cours dans d'autres master ou formations.

PROPOSITIONS DE PARCOURS

Objectif : Agrégation

Au premier semestre, choisir les deux cours d'*Analyse* et d'*Algèbre* (9 crédits chacun), ainsi que le cours de *Probabilités* (6 crédits). Choisir le cours restant (6 crédits) selon ses goûts, éventuellement parmi ceux du parcours appliqué.

Au second semestre, choisir un cours (9 crédits) du parcours appliqué et le projet correspondant (6 crédits).

Objectif : Agrégation et mathématiques fondamentales

Au premier semestre, choisir les deux cours d'*Analyse* et d'*Algèbre* (9 crédits chacun), ainsi que le cours de *Probabilités* (6 crédits). Choisir le cours restant (6 crédits) selon ses goûts, éventuellement parmi ceux du parcours appliqué.

Au second semestre, prendre deux ou trois cours dans le parcours visé en deuxième année et au moins un cours dans un autre parcours (6 crédits) ; cours de Langue vivante (3 crédits) ; TER (3 crédits).

Objectif : thèse en mathématiques fondamentales

Au premier semestre, choisir les deux cours d'analyse et d'algèbre (9 crédits chacun) et choisir les cours restants (6 crédits chacun) dans le parcours visé en deuxième année, éventuellement celui de probabilités.

Au second semestre, prendre un maximum de cours dans le parcours visé en deuxième année ; Langue vivante (3 crédits) ; TER (3 crédits).

Objectif : master en mathématiques appliquées

Au premier semestre, suivre tous les cours proposés dans le parcours applications, ainsi qu'un cours (9 crédits) du parcours mathématiques fondamentales choisir celui d'analyse ou d'algèbre selon la spécialité visée (calcul scientifique ou cryptographie) en deuxième année.

Au second semestre, choisir le cours (9 crédits) correspondant à la spécialité visée ; *Recherche opérationnelle* ; Langue vivante ; projet. Prendre un cours (6 crédits) ailleurs, de préférence *Mécanique des milieux continus* ou *Algèbre commutative et géométrie algébrique*.

UNITÉS D'ENSEIGNEMENT — PARCOURS MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

PREMIER SEMESTRE

- ▶ **Analyse réelle et complexe de base** 9 ECTS, 36 h de cours, 36 h de TD, 12 h de TP
 - Espaces de Hilbert ; séries de Fourier
 - Transformée de Fourier et transformée de Fourier-Laplace (*y compris* Rapports sur l'intégration, la convolution, les espaces L^p, \dots)
 - Fonctions analytiques d'une variable complexe
 - En travaux pratiques : Équation de la chaleur sur un intervalle et méthodes numériques associées ; Transformée de fourier rapide, éventuellement ondelettes

- ▶ **Analyse fonctionnelle et distributions** 9 ECTS, 36 h de cours, 36 h de TD
 - Rappels sur les espaces vectoriels normés. Exemples classiques
 - Dualité. Convergence faible (mais pas topologie faible!).
 - Distributions
 - Théorèmes de l'application ouverte, du graphe fermé, de Banach-Steinhaus.
 - Convexité : théorème de Hahn-Banach, points extrémaux, théorème de Choquet (en dimension finie éventuellement).
 - Opérateurs (continus) compacts, de Hilbert-Schmidt, ... dans un espace de Hilbert. Diagonalisation des opérateurs (continus) compacts auto-adjoints. Alternative de Fredholm.

- ▶ **Équations différentielles et phénomènes de transport** 6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD
 - Équations différentielles (rappels et compléments) : théorème de Cauchy-Lipschitz, flot d'un champ de vecteurs, méthodes numériques
 - Introduction aux équations aux dérivées partielles et aux modèles fondamentaux.
 - Équations de transport : méthode des caractéristiques, invariants, systèmes à coefficients constants.
 - Approximation par la méthode des différences finies : consistance, ordre, stabilité, théorème d'équivalence de Lax, analyse de von Neumann.

- ▶ **Algèbre générale de base** 9 ECTS, 36 h de cours, 36 h de TD, 12 h de TP
 - Rappels sur groupes, anneaux, corps, idéaux, anneaux quotients.
 - extensions de corps, corps de rupture, de décomposition ; corps finis ; corps algébriquement clos, existence d'une clôture algébrique.
 - théorie de Galois (jusqu'à la correspondance, pas d'applications sérieuses).
 - algèbre linéaire : modules, sous-modules, quotients, familles libres, génératrices, bases. Cas des espaces vectoriels.
 - Matrices. Opérations élémentaires. Forme réduite échelonnée par lignes (dans un corps), forme de Hermite (anneau euclidien) ; forme de Smith (anneau euclidien). Application aux groupes abéliens de type fini et à la réduction des endomorphismes.

► **Théorie des nombres (algébrique et analytique)**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD

Il s'agit d'un cours d'introduction, plus dans l'esprit des livres de HARDY–WRIGHT ou de IRELAND–ROSEN que de celui de SAMUEL.

- arithmétique dans les corps finis (réciprocité quadratique, Chevalley–Warning, etc.)
- séries de Dirichlet et application au théorème des nombres premiers, théorème de la progression arithmétique
- anneaux d'entiers des corps quadratiques : anneau des entiers de Gauss et sommes de deux (voire quatre) carrés ; théorie de Gauss ; équation de Pell–Fermat...

► **Géométrie différentielle**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD

- Rappels de calcul différentiel (théorèmes des fonctions implicites et d'inversion locale en dimension finie)
- Sous-variétés de \mathbf{R}^n : coordonnées locales, espace tangent
- Courbes paramétrées : abscisse curviligne, courbure, etc. ; courbes planes : théorème de Jordan (cas \mathcal{C}^1).

► **Probabilités de base**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD, 12 h de TP

- Espaces de probabilité, espérance...
- Variables aléatoires, lois, fonctions caractéristiques, indépendance.
- Convergences : dans L^p , presque sûre, en probabilité, en loi
- Théorèmes limites : Loi forte des grands nombres, théorème limite central.
- Vecteurs gaussiens : théorème de Cochran, échantillons gaussiens.

SECOND SEMESTRE

► **Équations aux dérivées partielles elliptiques**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD

- fonctions harmoniques, noyau de Poisson
- formulation variationnelle du problème de Dirichlet : espace H^1 , principe du maximum, hypoellipticité,...
- méthodes numériques (éléments finis en dimension 1)

► **Fonctions spéciales et fonctions holomorphes**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD

- Familles normales et représentation conforme
- Développements asymptotiques (méthode de Laplace, de la phase stationnaire, du col) ; fonction d'Airy.
- Équations différentielles dans le plan complexe (théorie locale) ; théorie de Fuchs ; fonctions de Bessel.

► **Algèbre commutative et géométrie algébrique**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD

- Algèbres de polynômes : caractère factoriel, noethérien
- Résultant, élimination.
- Idéaux monomiaux, lemme de Dixon, bases de Gröbner
- Théorème des zéros de Hilbert, correspondance algèbre - géométrie.
- Application des bases de Gröbner à divers problèmes algorithmiques d'algèbre commutative

- Étude (au choix) de quelques variétés affines ou projectives.

► **Théorie des groupes et géométrie** 6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD

- Rappels sur les groupes et les actions de groupes.
- Groupe linéaire, spécial linéaire sur un corps ; familles de générateurs. Drapeaux, décomposition LU , décomposition de Bruhat.
- Formes bilinéaires et quadratiques ; groupes orthogonaux et symplectiques. Théorème de Cartan-Dieudonné.
- Formes quadratiques sur \mathbf{R} ; compacité du groupe orthogonal. Ses sous-groupes finis en dimension 3. Décompositions de Cartan et d'Iwasawa.
- Groupes linéaires sur un corps fini. Simplicité. Étude zoologique : utilisation des inversibles d'une sous-algèbre de matrices pour trouver des sous-groupes de Sylow - dans des tores maximaux ou des sous-groupes unipotents selon les cas.
- Sous-groupes fermés (théorème de Cartan) et compacts du groupe linéaire.

► **Topologie algébrique et géométrie riemannienne**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD

Le cours exposera un plusieurs thèmes parmi les suivants :

- revêtements, groupe fondamental
- variétés et leur cohomologie de De Rham, formule de Stokes
- (co)homologie singulière
- variétés riemanniennes (surfaces : theorema egregium), géodésiques,...
- topologie différentielle

► **Statistique mathématique**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD

- Moyenne, variance et moments empiriques. Méthode des moments.
- Statistiques d'ordre, quantiles et fonction de répartition empirique : Théorèmes de Glivenko-Cantelli et de Kolmogorov-Smirnov. Test d'ajustement de Kolmogorov-Smirnov.
- Lois et tests de χ^2 .
- Loi conditionnelle et problème des moindres carrés
- Modèle statistique
- Estimation d'un paramètre
- Borne inférieure pour l'erreur quadratique : inégalité d'information
- Famille exponentielle
- Propriétés asymptotiques d'un estimateur
- Intervalle de confiance
- Convergence de l'estimateur de vraisemblance.
- Test d'hypothèses. Lemme de Neyman-Pearson.

► **Chaînes de Markov et Martingales**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD

- Espérance conditionnelle
- Chaînes de Markov à espace d'états dénombrable.
- Processus à temps discret,
- Martingales : théorème d'arrêt de Doob, théorème de convergence presque sûre

UNITÉS D'ENSEIGNEMENT — PARCOURS MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

PREMIER SEMESTRE

- ▶ **Analyse réelle et complexe de base** 9 ECTS, 36 h de cours, 36 h de TD, 12 h de TP
cours du parcours *mathématiques*
- ▶ **Algèbre générale de base** 9 ECTS, 36 h de cours, 36 h de TD, 12 h de TP
cours du parcours *mathématiques*
- ▶ **Méthodes numériques** 6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD
 - Accélération de la convergence
 - Recherche des zéros (dichotomie,..., Newton)
 - Calculs d'intégrales (interpolation, méthodes de Gauss, méthodes de Monte-Carlo)
 - Quelques algorithmes sur les matrices (pivot de Gauss, décompositions de Choleski, LU) ; notion de conditionnement.
 - Équations différentielles (théorie et numérique)
 - Approximation de fonctions (interpolation, splines,...)
- ▶ **Probabilités et statistiques pour l'ingénieur** 6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD
 - Espaces de probabilités, espérance,...
 - Variables aléatoires, lois, fonctions caractéristiques, indépendance, calcul de lois.
 - Convergence : dans L^p , presque sûre, en probabilité, en loi.
 - Théorèmes limites : Loi forte des grands nombres (dans L^4), théorème limite central.
 - Méthode de Monte-Carlo, notion d'intervalle de confiance.
 - Vecteurs gaussiens : théorème de Cochran, échantillons gaussiens. Lois associées (χ^2 , Student, Fischer...)
- ▶ **Algorithmique de base** 6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TD
 - Numérique : Représentation des entiers, des réels ; quatre opérations ; (algorithmes de calculs de fonctions transcendantes) ; algorithme d'Euclide (entiers et polynômes).
 - Algorithmes de tri
 - Notions de complexité (savoir compter le nombre d'opérations)
 - Initiation à la programmation
- ▶ **Pratique de logiciels de calcul scientifique** 3 ECTS, 24 h de TP
Introduction à Matlab et Maple, en liaison avec les cours précédents.

SECOND SEMESTRE

- ▶ **Modélisation et simulation numérique de phénomènes physiques + Matlab** 9 ECTS, 36 h de cours, 48 h de TD/TP
 - Introduction aux modèles fondamentaux : stationnaires (équation de Laplace), propagatifs (transport, ondes), diffusifs (chaleur).

- L'équation de Laplace en dimension 2 : formulation variationnelle pour différents problèmes aux limites, utilisation du théorème de Lax-Milgram, méthode des éléments finis.
- L'équation de transport en dimension 1 d'espace : méthode des caractéristiques, différences finies.

► **Théorie de l'information et codage + Maple**

9 ECTS, 36 h de cours, 48 h de TD/TP

- Mesure de l'information, entropie, théorème de Shannon
- Compression (exemples)
- Codes correcteurs d'erreurs (codes linéaires)
- Cryptographie (principes généraux et exemples, tant symétriques qu'asymétriques)

► **Projet / stage**

6 ECTS

Il s'agit ici ou bien d'un projet appliqué dans l'une des trois thématiques précédentes, ou bien d'un stage d'un ou deux mois en entreprise.

► **Optimisation discrète et recherche opérationnelle**

6 ECTS, 24 h de cours, 24 h de TP

- algorithmique des graphes (parcours, *max flow/min cut*, etc.)
- méthode du simplexe
- recuit simulé ; application au problème du voyageur de commerce