Trialité et octonions

Cyril
@ Pompers
26/5/16

<u>But:</u> $\mathfrak{g}$ alg. de Lie sur $\mathbb{C}$ simple, alors

$\mathrm{Out}(\mathfrak{g})$ ne contient que des éléments d'ordre 2, sauf si: $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$. Dans ce cas, $\mathrm{Out}(\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})) \simeq S_3$

<u>Déf:</u>

Algèbre de Lie: s-ev de $M_n(\mathbb{C})$ stable par $[,]$:

$$[X,Y] = XY - YX.$$

Idéal de $\mathfrak{g}$: s-ev $I \subseteq \mathfrak{g}$ t.q. $[\mathfrak{g}, I] \subseteq I$.

$\mathfrak{g}$ simple: les seuls idéaux sont $\mathfrak{g}$ et $\{0\}$.

<u>Déf:</u> Groupe de Lie G: s-g de $GL_n(\mathbb{C})$ + structure de variété différentiable.

$T_e G$ = alg de Lie associée à G.

<u>Thm [Lie]:</u> Si $\mathfrak{g}$ est une alg. de Lie, il existe un unique groupe $\tilde{G}$ <u>simplement connexe</u> ayant $\mathfrak{g}$ pour alg. de Lie.

Tout autre gpe G ~~ayant~~ associé à $\mathfrak{g}$ est un quotient de $\tilde{G}$ par un s-g de $Z(G)$.

$G_{ad} = \tilde{G}/Z(\tilde{G})$ = unique groupe de centre trivial associé à $\mathfrak{g}$.

<u>Ex:</u> $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}) = \{\text{matrice de tr} = 0\}$.

alg. de Lie de $SL_n(\mathbb{R})$.

$$\tilde{G} = \widetilde{SL_n(\mathbb{R})}$$

$$G_{ad} = PSL_n(\mathbb{R}).$$

<u>Rq:</u> G_{ad} est algébrique, mais pas $\tilde{G}$

<u>Automorphisme de $\mathfrak{g}$</u> isomorphisme linéaire α t.q. :

$$\alpha([X,Y]) = [\alpha(X), \alpha(Y)]$$

<u>Automorphisme de G</u> : Si $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, sa différentielle $_e$ est un automorphisme de $\mathfrak{g}$.

Si $G = \tilde{G}$ ou G_{ad}, on a $\mathrm{Aut}(G) \simeq \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$.

<u>Automorphisme intérieur de G</u> :

$$C_a : \begin{cases} G \to G \\ x \mapsto axa^{-1} \end{cases}$$

<u>Automorphisme intérieur de $\mathfrak{g}$</u> : $D_e C_a$, $a \in G$, où G a pour alg. de Lie $\mathfrak{g}$. (ne dépend pas du gpe G choisi).

$\mathrm{Int}(\mathfrak{g})$: autom. intérieurs

$\mathrm{Out}(\mathfrak{g})$: $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) / \mathrm{Int}(\mathfrak{g})$ autom ext.

<u>Prop</u> : Si $\mathfrak{g}$ est simple, $\mathrm{Out}(\mathfrak{g})$ est fini.

<u>Classification des algèbres de Lie simples sur $\mathbb{C}$</u> :

<u>Classiques</u> : $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{so}_n(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{C})$.

<u>Exceptionelles</u> : $\mathfrak{g}_2^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{f}_4^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{e}_6^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{e}_7^{\mathbb{C}}$, $\mathfrak{e}_8^{\mathbb{C}}$.

$\mathrm{Out}(\mathfrak{g}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\{1\}$.

Sauf si $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{so}_8(\mathbb{C})$, $\mathrm{Out}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{so}_8(\mathbb{C})) = S_3$.

$\mathrm{Out}(SO_8(\mathbb{C}))$ contient un élément d'ordre 3 : τ

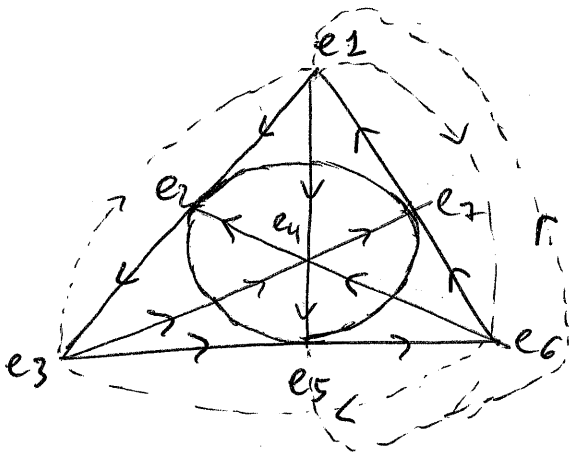
$\tau \to$ trialité.

$\hookrightarrow$ Induit un autom. dans $PSO_8(\mathbb{C})$
$PSO_8(\mathbb{R})$
$\mathrm{Spin}(8,\mathbb{R})$
$\mathrm{Spin}(8,\mathbb{C})$.
mais pas ds $SO_8(\mathbb{C})$

Octonions :

$\mathbb{O}$ = $\mathbb{R}$-"alg" de dim. 8
$\mathbb{R}$-ev
$= \mathrm{Vect}(\underset{e_0}{1}, e_1, \dots, e_7)$.

muni d'une multiplication ni associative
ni commutative.



$e_i^2 = -1 \quad i \neq 0$.

$e_i e_j = -e_j e_i \quad i \neq 0, j \neq 0$

$e_1 e_2 = e_3$.

$\mathrm{Vect}(1, e_1, e_2, e_3) = \mathbb{H}$.

La multiplication est alternative :

$\forall x, y, \quad x(yx) = (xy)x = xyx$
$x(xy) = (xx)y = x^2 y$.

Conj : $x = \sum_{i=0}^{7} a_i e_i \quad a \in \mathbb{R}$.

$\bar{x} = a_0 - \sum_{i=1}^{7} a_i e_i$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{7} a_i b_i \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$x = \sum a_i e_i$, $y = \sum b_i e_i$

$$x \cdot \bar{x} = \bar{x} \cdot x = \|x\|^2$$

Si $x \neq 0$, x a un inverse $x^{-1} = \dfrac{\bar{x}}{\|x\|^2}$

<u>Prop:</u> $x(y\bar{x}) = xy\bar{x}$ $\qquad \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}$

$x(\bar{x}y) = (x\bar{x})y = \|x\|^2 y$.

<u>Règle de Moufang:</u> $(ax)(ya) = a(xy)a$.

$$SO(8) = SO(\mathbb{O}) = \left\{ \alpha \in Iso_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \;\middle|\; \begin{array}{l} \langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle = \langle x, y \rangle \\ \det(\alpha) = 1 \end{array} \right\}.$$

$$G_2 = Aut(\mathbb{O}) = \{ \alpha \in Iso_{\mathbb{R}}(\mathbb{O}) \mid \alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) \} \subset SO(8)$$

Il suffit de MQ $\alpha(\bar{x}) = \overline{\alpha(x)}$:

On le fait sur la base:

$\alpha(1) = 1$

$\alpha(e_i) \cdot \alpha(e_i) = \alpha(e_i^2) = \alpha(-1) = -1. \Rightarrow \|\alpha(e_i)\| = 1.$

donc $\alpha(e_i)^{-1} = \overline{\alpha(e_i)}$

$\Rightarrow \alpha(e_i)(-\alpha(e_i)) = 1$ donc $\overline{\alpha(e_i)} = \alpha(e_i)^{-1} = -\alpha(e_i) = \alpha(-e_i) = \alpha(\bar{e}_i)$

$$\|\alpha(x)\|^2 = \alpha(x) \cdot \overline{\alpha(x)}$$
$$= \alpha(x) \cdot \alpha(\bar{x})$$
$$= \alpha(x\bar{x}) = \alpha(\|x\|^2) = \|x\|^2$$

Trialité dans $PSO(8)$:

Cyril
© Lampers
3

Thm: Si $\alpha_1 \in SO(8) = SO(\mathbb{O})$, alors,

il existe $\alpha_2, \alpha_3 \in SO(8)$ t.q.

$\forall x, y \in \mathbb{O}^2 \quad \alpha_1(xy) = \alpha_2(x) \cdot \alpha_3(y)$.

De plus (α_2, α_3) est unique au signe près.

Rq: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \iff \alpha_1 \in G_2$

Preuve: α_1 s'écrit comme un produit pair de réflexions.

Il suffit de le montrer pour $\alpha_1 = R_b \cdot R_a$. $\|a\| = \|b\| = 1$.

$$R_a(x) = x - 2\langle a, x\rangle a$$
$$= x - (a\bar{x} + x\bar{a})a$$
$$= -a\bar{x}a$$

$$\alpha_1(x) = R_b R_a(x) = b(\bar{a}x\bar{a})b$$
$$\alpha_2(x) = b(\bar{a}x)$$
$$\alpha_3(x) = (x\bar{a})b$$

$$\alpha_1(xy) = b(\bar{a}(xy)\bar{a})b$$

$$\alpha_2(x)\alpha_2(y) = (b(\bar{a}x))((y\bar{a})b)$$
$$\underset{\text{Moufang}}{=} b((\bar{a}x)\cdot(y\bar{a}))b$$
$$\underset{\text{Moufang}}{=} b(\bar{a}(xy)\bar{a})b$$
$$= \alpha_1(xy).$$

~~De plus (α_2, α_3) e~~

Trialité : $\alpha_1 \in PSO(8)$. On applique le thm à $K\alpha_1$.

$$(K\alpha_1)(x) = \overline{\alpha_1(\overline{x})}$$

$\hookrightarrow (\alpha_2, \alpha_3)$.

$\tau(\alpha_1) = \alpha_2$.

$(K\alpha_1)(xy) = \alpha_2(x)\alpha_3(y)$.

$(K\alpha_2)(xy) = \alpha_3(x) \cdot \alpha_1(y)$

$(K\alpha_3)(xy) = \alpha_1(x) \cdot \alpha_2(y)$

$\tau^3 = 1$

$K^2 = 1$.

$(\tau K)^2 = 1$

$$\mathrm{Out}(PSO_8(\mathbb{R}\ (\mathbb{C}))) = \langle \tau, K \mid \tau^3 = 1, K^2 = 1, (\tau K)^2 = 1 \rangle.$$
$$= S_3$$

Matriciellement K = conj par $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$