Groupe de Cremona et espaces hyperboliques

Anne @ Campus

1

I) Groupe de Cremona

Def: Une application rationnelle $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$
$[x:y:z] \dashrightarrow [f_3(x,y,z) : f_1(-) : f_2(-)]$
où f_i sont des polynomes homogènes de m̂ degré sans facteur carré

Def: $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ est le groupe de applications birat. de $\mathbb{P}^2$;
les applications rat. ayant un inverse rat.

Pbs de def: * si $f([x:y:z]) = [0:0:0]$,
* on peut envoyer des courbes sur des pts.

On prend pour f def : $f : U \xrightarrow{\sim} V$ isomorphisme, U, V ouverts de $\mathbb{P}^2$ (Zariski)

Exemple: 1) $\sigma : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$
$[x:y:z] \dashrightarrow [yz : xz : xy]$
en $[1:0:0]$?
$\{x=0\} \mapsto [1:0:0]$.

2) $PGL_3(\mathbb{C})$.

3) jonquières : celles qui préservent un pinceau de droites. * ↷ *

Thm (Noether-Castelnuovo) : $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = \langle \sigma, PGL_3(\mathbb{C}) \rangle$.
(Vrai pr tout corps alg. clos)

II) Espaces δ-hyperboliques

80' Gromov ← Groupes libres
← $\pi_1(S_g)$: surface compacte de genre $g \geq 2$

Def: Un groupe est hyperbolique si son graphe de Cayley est δ-hyperbolique

Thm : Dahmani, Guirardel, Osin (2014)

$G \curvearrowright X$ δ-hyperbolique, par isométries de façon "gentille" (wPD), alors le groupe possède plein de sous-groupes distingués et libres

Def : X espace géodésique est δ-hyperbolique si tous ses triangles sont δ-fins :

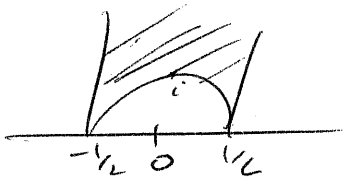
$$\forall x, y, z, \quad [x,y] \subset \delta\text{-voisinage}([x,z] \cup [z,y]).$$

Exemples : 1) Arbre : 0-hyperbolique

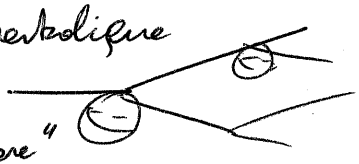
2) X espace métrique de diamètre fini D : D-hyp.

3) $\mathbb{H}^2$, le demi-plan de Poincaré est $\ln(1+\sqrt{2})$ hyperbolique.

On peut ramener ts les triangles ds



4) Graphe δ-hyperbolique "Un graphe qui ressemble de loin à un arbre"



Ex d'espaces non hyperboliques : $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{R}^2$.

II) $PSL_2(\mathbb{Z})$

$$PSL_2(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} a\,b\,c\,d \in \mathbb{Z} \\ ad - bc = 1 \end{matrix} \right\} / A \sim -A$$

$PSL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright \mathbb{H}^2$ par homographies. $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$

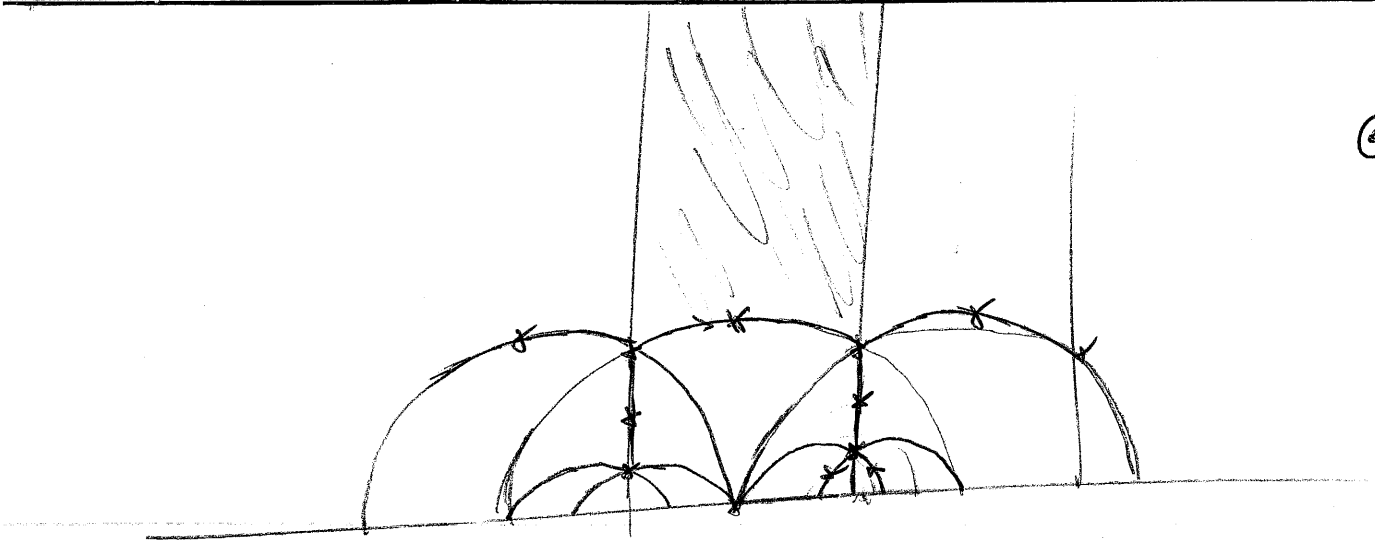
$t : z \mapsto z+1$

$a : z \mapsto \dfrac{-1}{z}$ (inversion par rap. au cercle unité).

$b : z \mapsto 1 - \dfrac{1}{z}$

$$PSL_2(\mathbb{Z}) \cong \underset{\langle a \rangle}{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} * \underset{\langle b \rangle}{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}.$$

Anne
② Lampers
2



IV) $\mathbb{H}^\infty$ et graphe de Wright

① $\mathbb{H}^\infty$

$\varphi(x) = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$. $\quad \mathbb{H}^2 := \{x \text{ tq } \varphi(x) = 1,\ x_0 > 0\}$.

$\mathbb{H}^\infty \cong$ " $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ éclaté en tous les points ? "

$\mathbb{H}^\infty$ est $\ln(1+\sqrt{2})$-hyperbolique.

② graphe de Wright

sommets : (S, ϕ) à équivalence près : $\varphi^{-1}\phi$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, dashed, "\phi"] \arrow[d, "\cong"] & \mathbb{P}^2 \\ S' \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

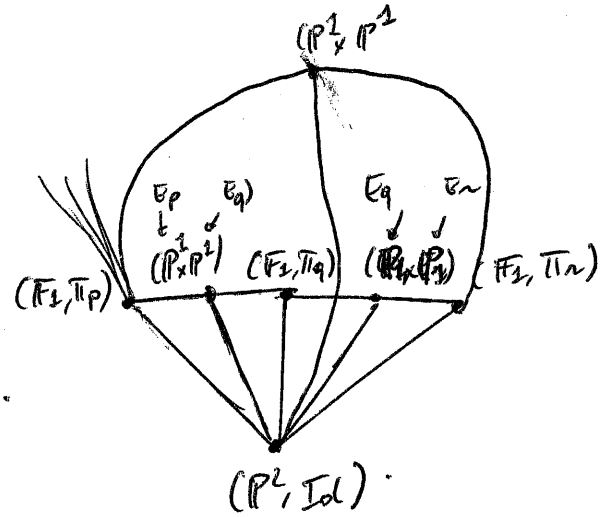
(S, ϕ) et (S', φ) st équiv. si $\varphi^{-1}\phi$ isom qui préserve la fibre (pr les type 1).

de type 2 :
$(\mathbb{P}^2, \phi)$ $\quad \phi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

de type 1 :
$(\mathbb{F}_1, \pi_p)$
$\mathbb{P}^2$ éclaté en 1 pt

de type 0 :
$(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \varphi)$.

Graphe :



Q : Quels st les plus courts chemins dans ce graphe ?
Est-il hyperbolique ?

$\phi . (\mathbb{P}^2, Id) = (\mathbb{P}^2, \phi)$.

Critère de Bowditch : Soit $h \geq 0$.

On se donne $\forall x, y \in V(\mathcal{G})$, $\mathcal{L}(x,y)$ un chemin :

1) $\forall x, y$, $x, y \in \mathcal{L}(x,y)$

2) $\forall x, y$ $d(x,y) \leq 1$ $\mathrm{Diam}(\mathcal{L}(x,y)) \leq h$.

3) $\forall x, y, z$, $\mathcal{L}(x,y) \subset V_h(\mathcal{L}(x,z) \cup \mathcal{L}(z,y))$.

Alors $\mathcal{G}$ est $\delta(h)$ hyperbolique.