# Berkovich et Courbes Elliptiques

(suite et fin)

Yvan @Pampers



## I] Rappel Berkovich

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Q} \arrow[r, "\text{complétion}"] \arrow[dr, "\text{complétion}"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "\text{clôt alg.}"] & \mathbb{C} \\
& \mathbb{Q}_p \arrow[r, "\text{clôt alg.}"] & \overline{\mathbb{Q}_p} \arrow[r, "\text{complétion}"] & \mathbb{C}_p
\end{tikzcd}$$

Quelques problèmes de $\mathbb{C}_p$

→ totalement discontinu

↳ $\exists f$ f° dérivable avec $f'=0$ qui n'est pas constante

→ Par ex $\chi_{B(0,1)}$ indicatrice est analytique.

---

Berkovich

<u>Def</u> : Soit $(A, \|\cdot\|)$ un anneau normé (sous-multiplicative)

Une semi norme bornée est un application $|\cdot| : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$

telle que
- $|1| = 1$
- $|0| = 0$
- $|fg| = |f| \cdot |g|$
- $|f+g| \leq |f| + |g|$
- $\exists C \in \mathbb{R}^+ \,/\, \forall f \quad |f| \leq C\|f\|$ (Borné)

On note $\mathcal{M}(A) = \{$semi-normes bornées sur $(A, \|\cdot\|)\}$

→ Spectre de Berkovich

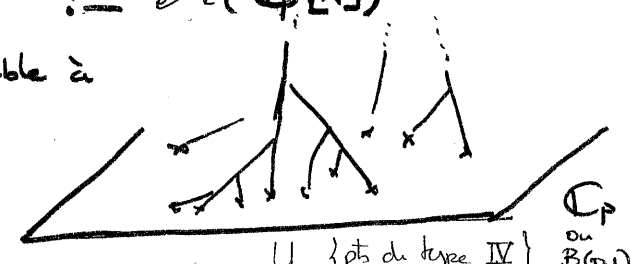
→ On le munit d'un faisceau de fonctions régulières.

<u>Rq</u> : • Si $A = \mathbb{C}[X]$

$\mathcal{M}(A) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$

$\mathbb{A}^{1\,(\text{Berk})}_{\mathbb{C}_p} := \mathcal{M}(\mathbb{C}_p[X])$

ressemble à



$\mathbb{C}_p$ ou $B(0,1) \subseteq \mathbb{C}_p$

$\cup$ {pts de type IV}

• $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p}$ est connexe par arc.

le faisceau des fonctions se définit de la manière suivante

sur $B(0,r) = B_r$ les fonctions analytiques sont les

$$\mathbb{C}_p\{r^{-1}T\} = \left\{ \sum_{n\geq 0} a_n T^n \;\middle|\; \begin{array}{l} |a_n| r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \\ a_n \in \mathbb{C}_p \end{array} \right\}$$

# II Courbes de Tate

<u>Def</u> : Une courbe elliptique (sur $\mathbb{C}_p$) est une var. algébrique de dim 1 lisse de genre 1 (et possédant au moins 1 point rationnel (sur $\mathbb{C}_p$))

qui est alg. clos ...

Dans le cas où la courbe est plane on a une equation de Weierstraß :

$$P(x,y) = y^2 + a_1 xy + a_3 y - (x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6)$$

<u>Réduction</u> : • <u>Dans $\mathbb{Q}_p$</u> $B_f(0,1) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x| \leq 1\} \simeq \mathbb{Z}_p$

$B_o(0,1) = \{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x| < 1\} \simeq p\mathbb{Z}_p$

$B_o(0,1) \subseteq B_f(0,1)$ et $k_{\mathbb{Q}_p} = \mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p = \mathbb{F}_p$

ideal max $\subseteq$ anneau local

Donc si $P$ est à coeffs ds $\mathbb{Z}_p$ on peut réduire à $\mathbb{F}_p[X,Y]$

• <u>Dans $\mathbb{C}_p$</u> On a toujours $B_f(0,1)$ anneau local

$B_o(0,1)$ ideal max

et $k_{\mathbb{C}_p} = B_f(0,1) / B_o(0,1) \simeq \overline{\mathbb{F}_p}$

et on peut réduire un polynôme $P$ à coeffs bornés dans $\overline{P} \in \overline{\mathbb{F}_p}[X,Y]$

Yvan
@Pompeu
2

- Sur $\mathbb{C}$, les courbes elliptiques sont les $\mathbb{C}/\Lambda$

- <u>Sur $\mathbb{C}_p$</u> ? $\Lambda$ est un sous-groupe discret.

Soit $G < \mathbb{C}_p$ $G \neq \{0\}$

Soit $x \neq 0$, $x \in G$ <u>alors</u> $p^n \cdot x \in G$ $\forall n \in \mathbb{N}$

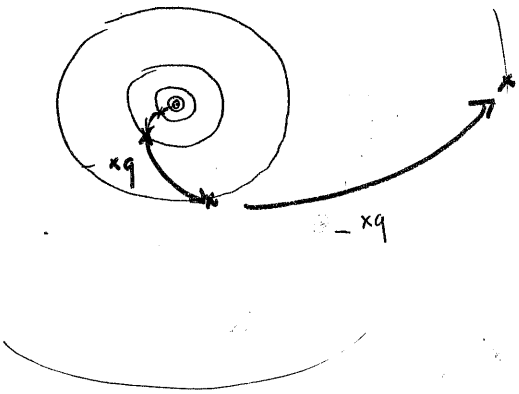
donc $p^n \cdot x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $0 \in \overline{G}$ ... Il n'y a pas de sous-groupe discret non trivial de $\mathbb{C}_p$ !!

---

<u>Autre interprétation</u> : Sur $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}/\Lambda \underset{\exp(2i\pi \cdot)}{\simeq} \mathbb{C}^*/q^{\mathbb{Z}}$

<u>avec</u> $q = e^{2i\pi\tau}$ si $\Lambda = \langle 1, \tau \rangle$




Soit $C$ une courbe elliptique sur $\mathbb{C}_p$

$\exists ?\, q \in \mathbb{C}_p$ tq $C \simeq \mathbb{C}_p^*/q^{\mathbb{Z}}$

<u>Thm</u> : $\left[\begin{array}{l} \exists q \in \mathbb{C}_p \text{ tq } C \simeq \mathbb{C}_p^*/q^{\mathbb{Z}} \\ \quad \underline{\text{ssi}} \\ C \text{ a une réduction semi-stable} \end{array}\right\}$ On les appelle Courbes de Tate

<u>Réduction semi-stable</u> :

$\overline{C}$ a au moins une singularité et ces singularités sont des points doubles (ou plus)

Les autres sont les courbes
→ à réduction lisses.

$$H^1_{cris}(\overline{C}) \simeq H^1_{dR}(C)$$

→ ou on s'en occupe pas

<u>Rq</u> : Les réductions des courbes de Tate (projectives) sont de la forme d'un n-gone formé de $\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$

où $n = |q|_p$

**Thm :** Soit $C$ courbe semi-stable sur $\mathbb{C}_p$

Alors $\exists\, C_B$ une courbe de Berkovich connexe lisse munie de

- $C_B \xrightarrow{\varphi} \overline{C}$ anticontinue
  $\varphi^{-1}(\text{ouvert}) = \text{fermé}$
  $\varphi^{-1}(\text{fermé}) = \text{ouvert}$

- $S$ ensemble fini de point de $C_B$ (de type II)

tels que :

(i) $\varphi$ induit une bijection entre $S$ et les points génériques de $\overline{C}$

(ii) $\varphi^{-1}((\text{pt lisse}))$ disque ouvert attaché au point de $S$ correspondant.

(iii) $\varphi^{-1}((\text{pt singulier}))$ est une couronne relient les points de $S$ correspondant.