Espaces de Berkovich et Courbes Elliptiques

Yvan (1)
@Pampers

I) Rappel sur les p-adiques

Soit K, un corps

Def : Une valeur absolue sur K est une fonction $|\cdot| : K \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telle que
i) $|x| = 0 \iff x = 0$
ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$
iii) $|x+y| \leq |x| + |y|$

Ex : (Sur $\mathbb{Q}$)
$|\cdot|_p$ valeur abs p-adique
$|0|_p = 0$
$|x|_p = p^{-v_p(x)}$

$|\cdot|_\infty$ valeur absolue usuelle.

Rq : valeur absolue $\longrightarrow$ distance.

Sur $\mathbb{Q}$: complétée avec $|\cdot|_\infty \rightsquigarrow$ on obtient $\mathbb{R}$
$|\cdot|_p \rightsquigarrow$ ——— $\mathbb{Q}_p$

Thm (Ostrowsky) Toute valeur absolue non-triviale sur $\mathbb{Q}$ est soit topologiquement équiv à $|\cdot|_\infty$ ou à $|\cdot|_p$ pour un certain p.

$\mathbb{Q}_p$: "ce qu'on aime"
→ complet
→ boule unité = anneau des entiers ($\mathbb{Z}_p$)
→ on peut réduire modulo p.
→ et on est en car = 0

"ce qu'on aime moins"
→ totalement discontinu
→ pas alg. clos.

Une solution : $\mathbb{Q}_p \underset{\text{clôture algébrique}}{\rightsquigarrow} \overline{\mathbb{Q}_p} \underset{\text{complétion}}{\rightsquigarrow} \mathbb{C}_p$
$\overline{\mathbb{Q}_p}$: pas complet
$\mathbb{C}_p$: alg. clos.

Dans $\mathbb{C}_p$ on peut réduire "modulo p." ie vers $\overline{\mathbb{F}_p}$
mais $\mathbb{C}_p$ reste totalement discontinu.

→ Les boules ouvertes sont ouvertes et fermées.
→ Les boules fermées ———
→ Les boules sont soit disjointes soit emboîtées.

Quelques pb d'analyse :

- $f : \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \longrightarrow \mathbb{Z}_p \\ \sum a_n p^n \longmapsto \sum a_n p^{2n} \end{pmatrix}$ vérifie $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Z}_p$

- $\{B(0,1),\ \mathbb{C}_p \setminus B(0,1)\}$ est un rec. ouvert de $\mathbb{C}_p$
  en particulier $\chi_{B(0,1)}$ est analytique.

II) Espaces de Berkovich

Def : Un anneau normé $(A, |\cdot|)$ avec
- A anneau
- $|\cdot| : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$

(α) • $|1| = 1$
(β) • $|f| = 0 \iff f = 0$
(γ) • $|fg| \leq |f| \cdot |g|$
(δ) • $|f+g| \leq |f| + |g|$

semi-norme : $|\cdot| : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tq (α), (β'), (γ), (δ) où (β') : $|0| = 0$

Def Spectre de Berkovich d'un anneau A, $|\cdot|_A$
est $\mathcal{M}(A) = \{$semi-norme $|\cdot|$ $\underbrace{\text{bornée sur } A}_{\exists C > 0 \,/\, |\cdot| \leq C|\cdot|_A}\}$

munit de la topologie
la plus faible telle que les fonctions d'évaluation $f : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathbb{R}^+$, $|\cdot| \longmapsto |f|$
soient C^0.

Rq : On a aussi un faisceau d'anneaux naturel.
$\ker(|\cdot|)$ sont des idéaux 1ers. (on se dit qu'on va retrouver $\mathrm{Spec}(A) \subseteq \mathcal{M}(A)$)

$\hookrightarrow$ $\mathcal{M}(\mathbb{C}[T]) = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$

Thm :
- Si $A \neq \{0\}$, $\mathcal{M}(A) \neq \emptyset$
- Si A complet, $\mathcal{M}(A)$ compact

$\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p} = \mathcal{M}(\mathbb{C}_p[T])$? Quelles sont les semi-normes sur $\mathbb{C}_p[T]$, (max $|\text{coeffs}|$)

Ex :
- $B(a,r) = \{x \in \mathbb{C}_p \mid |x-a|_p \leq r\}$
- $|\cdot|_{B(a,r)} : \begin{pmatrix} \mathbb{C}_p[T] \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ f \longmapsto \sup_{b \in B(a,r)} |f(b)|_p \end{pmatrix}$ semi-norme bornée.

YVAN (2)
@ PAMPERS

Si $B_n = B(a_n, r_n)$ est une suite décroissante de boules.

Alors $\lim_n |f|_{B_n}$ est bien définie

et $|\cdot|_{(B_n)} : f \longmapsto \lim_n |f|_{B_n}$ est une semi-norme bornée

Thm | Les seules semi-normes bornées sur $\mathbb{C}_p[T]$ sont du type $|\cdot|_{(B_n)}$.

Plusieurs cas :

I) $\bigcap_n B_n = \{pt\}$

II) $\bigcap_n B_n = B(a,r)$ $\quad r \in |\mathbb{C}_p^*|$

III) $\bigcap_n B_n = B(a,r)$ $\quad r \notin |\mathbb{C}_p^*|$

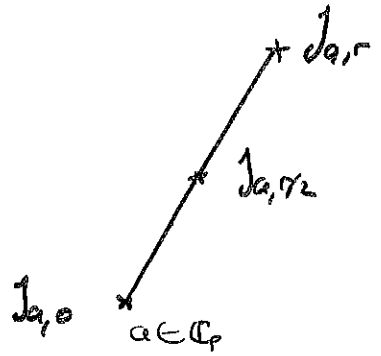
IV) $\bigcap_n B_n = \emptyset$

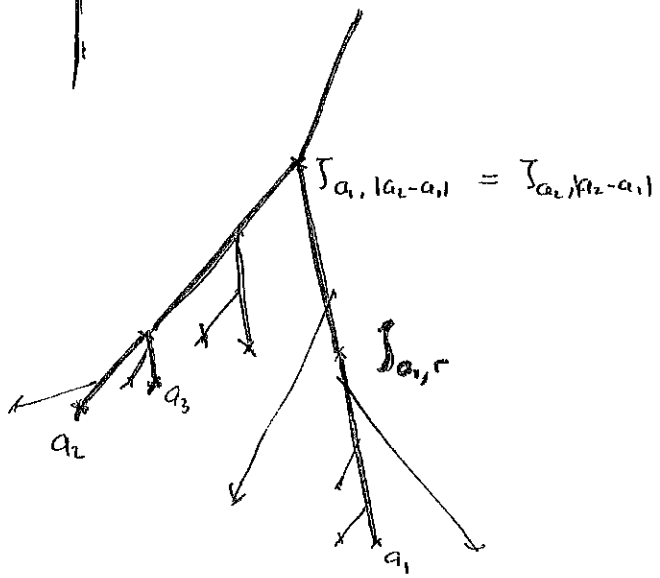
On note $\zeta_{a,r}$ le point correspondant à $B(a,r)$.

On a un ordre partiel :

$\zeta_{a_1,r_1} \geq \zeta_{a_2,r_2}$ si

$\forall f \in \mathbb{C}_p[T]$, $|f|_{B(a_1,r_1)} \geq |f|_{B(a_2,r_2)}$





Boule de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}_p}$

$$B(a,r) = \{ \zeta_{b,s} \mid b \in B(a,r),\ s \leq r \}$$