Les Questions de Von Neumann - Day

Nicolas
@PAMPERS

Moyennabilité des groupes

G groupe de type fini $\quad G = \langle S \rangle$

tq • $\{\sigma^{-1} \mid \sigma \in S\} = S$

• $\# S < \infty$

$Cay(G,S)$ graphe : sommets $V = G$

flèches E : $g \overset{\sigma}{\frown} g\sigma \quad \sigma \in S$

Def : G moyennable

Si $\exists$ proba sur G <u>finiement additive</u> G-invariante.

<u>Caractérisations</u>

Følner : G moyen. $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists F \subset G$ finie tq $|\partial_S F| < \varepsilon |F|$

où $\partial_S F$: frontière de F ds le graphe de Cayley

Késten : $g_n = s_n \cdots s_1$ marche aléatoire sur G (à pas dans S)

$\left(\mathbb{P}(g_n = e) \to 0 \text{ exp. vite}\right) \iff \left(G \text{ non-moyennable}\right)$

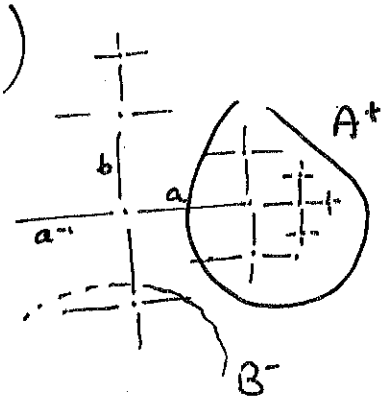
<u>Exemple</u> : Sont moyennables :

▷ Groupes finis

▷ $\mathbb{Z}$ (par car. de Følner $[-n,n] \cap \mathbb{Z} = F$, $|\partial F| = 2$)

Sont non-moyennable :

▷ $F_2 = \langle a, b \rangle$



$F_2 = A^+ \sqcup A^- \sqcup B^+ \sqcup B^- \sqcup \{e\} \Rightarrow m(A^+) + \cdots + m(B^-) + m(e) = 1$

$= a^{-1}A^+ \sqcup A^- \Rightarrow m(A^+) + m(A^{-1}) = 1$

$= b^{-1}B^+ \sqcup B^- \Rightarrow m(B^+) + m(B^{-1}) = 1$ absurde.

La moyennabilité est stable par

1 → Extension $\quad 0 \to A \to G \to B \to 0$

2 → limite directe

3 → sous-groupes

4 → Quotient

<u>CSQ</u> : Si $F_2 \hookrightarrow G$ <u>Alors</u> G non-moyennable

Def [Day '50] Groupes élémentairement Moyennables

$EG = \overline{\{\mathbb{Z}, \text{gp finis}\}}^{(1),(2),(3),(4)}$

Q1 : [Day '50] Est-ce que tout groupe moyennable est dans EG ?

Q2 : Est-ce que tout groupe non moyennable G vérifie $F_2 \hookrightarrow G$?

R1 : Non [Grigorchuck '80]

R2 : Non [Ol'Shanskii '80]

Réponses plus récentes : 1) [Suscharko-Monod '12]
$\exists$ Gp infinis, de type fini, simples, moyennables

simple $\not\in EG$

2) [Monod '13]

$PSL_2(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \simeq S^1$ $\qquad$ $PSL_2(\mathbb{R})$ non moyennable

$G =$ Homéos de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ qui sont des elts de $PSL_2(\mathbb{R})$ par morceaux.

$PSL_2 \hookrightarrow G$ $\qquad$ Soit $H = \mathrm{Stab}_G(\{\infty\})$

$A < \mathbb{R}$ sous-anneau dénombrable.

$\rightarrow$ on a les groupes $G(A) > H(A)$

Thm : Si $A \neq \mathbb{Z}$ Alors
- $H(A)$ non-moyennable (α)
- $H(A)$ ne contient pas de F_2 (β)

Preuve de (β) sur $A = \mathbb{R}$

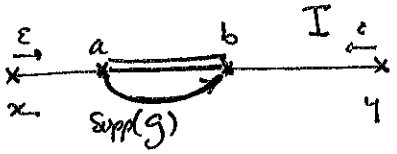
$H \hookrightarrow \mathrm{Homeo}^+(\mathbb{R})$. Soit $K < H$ on veut MQ K pas libre

On va montrer :
- Soit $K'' = \{e\}$
- Soit $\mathbb{Z}^2 \hookrightarrow K$

| Dans tous les cas $K \neq F_2$

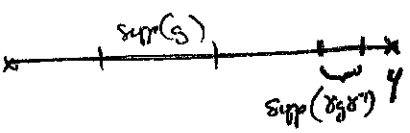
Supposons $g \in K'' \setminus \{e\}$

Soit $I =$ comp. connexe de $\mathbb{R} \setminus \mathrm{Fix}(K)$ sur laquelle $g \neq id$.



FACT : $]x, x+\varepsilon] \cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$ pour $\varepsilon > 0$
$[y-\varepsilon, y[\cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$

$\exists \gamma_n \in K$ tq $\gamma_n a \xrightarrow[n \to +\infty]{} y$ car K n'a pas de pt fixe sur I



Alors $\langle g^\gamma, g \rangle = \mathbb{Z}^2$

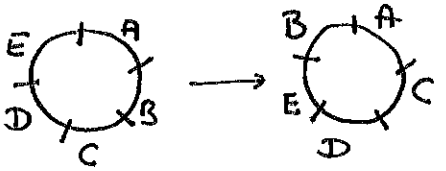
$g^\gamma = \gamma g \gamma^{-1}$

Une réponse à la question 1.
[—, Juschenko, Monod, De la Salle]

Nicolas
@ Pampers
2

IET : groupe des echanges d'intervalles.

$\phi : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ permutation d'intervalles par morceaux



(nombre fini de discontinuité)

Q : Katok $F_2 \hookrightarrow IET$?

Q : IET moyennable ?

$\Lambda < \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ sg de type fini. Alors $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^d \oplus T$

$IET(\Lambda) = \{\phi \in IET \mid \phi$ discontinue sur des pts de $\Lambda\}$

Thm [—, Jusc., Mon, DLS]
Si $d \leq 2$ Alors $IET(\Lambda)$ moyennable
Mais $IET(\Lambda)$ n'est pas dans EG