1 Le problème de réalisation de Nielsen

Le groupe d'isométries d'une surface hyperbolique fermée M, orientable et de genre $g \geq 2$ est toujours fini et la seule isométrie qui est isotope à l'identité est l'identité même. Les surfaces hyperboliques avec groupe d'isométries non trivial ont était utilises pour construire sous-groupes finis du groupe des classes d'isotopie de difféomorphismes de M, $\pi_0(Diff(M))$, appelé mapping class group et notée $Mod(M)$ ou $MCG(M)$. On peut se demander, au sens contraire, si des sous-groupes finis du mapping class group peuvent être réalisés comme des groupes d'isométries de surfaces hyperboliques. L'objectif de mon exposé sera de raconter les divers éléments impliqués dans le résultat suivant due à Steven P. Kerckhoff.

Théorème 1. *Tout sous-groupe fini G de $\pi_0(Diff(M))$ peut être réalisé comme un groupe d'isométries d'une surface hyperbolique.*

Si l'on désigne par $Diff_0(M)$ le sous groupe distingué de $Diff_+(M)$ donné par les difféomorphismes isotopes a l'identité, le mapping class group est le quotient

$$Mod(M) = Diff_+(M)/Diff_0(M).$$

Morita [5] a prouvé que, si le genre de M est au moins 5 la suite exacte

$$1 \to Diff_0(M) \to Diff_+(M) \to Mod(M) \to 1$$

ne scinde pas. Plus tard Franks et Handel [3] ont montré le même résultat pour genre 3, Markovic et Saric [4] ont montré que pour $g \geq 2$ le mapping class group ne se relève pas a le groupe d'homéomorphismes. Cantat et Cervau [2] on montré un résultat analogue pour des sous-groupes d'indice fini du mapping class group et le groupe des difféomorphismes analytiques. Etant donné un sous-groupe G de $Mod(M)$ le problème de réalisation de Nielsen demande quelles conditions doivent se imposer sur G, pour qu'il soit possible de le relever a $Diff_+(M)$. Kerckhoff [1] a montré que ce problème d'extension est résoluble pour des sous-groupes finis. En fait, il a montré le théorème équivalent suivant :

Théorème 2. *Tout sous-groupe fini $G \subset Mod(M)$ agissant sur T_g a un point fixe.*

Ici T_g est l'espace de Teichmüller sur M.

2 Plan

Kerckhoff a montré le **théorème 2** à partir de laquelle on peut en déduire les théorèmes **1** et **3**.

La structure de mon exposé sera la suivant :

Théorème (2). *Tout sous-groupe fini $G \subset Mod(M)$ agissant sur T_g a un point fixe.*

Ici T_g est l'espace de Teichmüller sur M.

$$\Downarrow$$

Théorème (1). *Tout sous-groupe fini G de $\pi_0(Diff(M))$ peut être réalisé comme un groupe d'isométries d'une surface hyperbolique.*

$$\Downarrow$$

Théorème (3). *Le problème d'extension (lifting problem) pour $\pi : Diff(M) \to \pi_0 Diff(M)$ est résoluble pour $G \subset \pi_0 Diff(M)$ fini quand M est une surface de genre g.*

Remarque. *La Preuve du **théorème 2** contient pas mal des éléments assez importantes dans la théorie de Teichmuller.*

Remarque. *Pour motiver un peu le problème, je vous promets qu'il y aura des tremblements de terre et un gâteau a la fin.*

Références

[1] Kerckhoff, S. – Kerckhoff, Steven P. "The Nielsen realization problem." Annals of mathematics (1983) : 235-265.

[2] Cantat, S. & Cervau, D. – Cantat Serge, and Dominique Cerveau. "Analytic actions of mapping class groups on surfaces." Journal of topology 1.4 (2008) : 910-922.

[3] Franks, J. & Handel, M. – Franks, John, and Michael Handel. "Global fixed points for centralizers and Morita's Theorem." Geometry and Topology 13.1 (2009) : 87-98.

[4] Markovic, V. & Saric, D. – Markovic, Vladimir, and Dragomir Saric. "The mapping class group cannot be realized by homeomorphisms." arXiv preprint arXiv :0807.0182 (2008).

[5] Morita, S. – Morita, Shigeyuki. Geometry of characteristic classes. Vol. 199. American Mathematical Soc., 2001.

[6] Thurston, W. – Thurston, William P. "Geometry and topology of 3-manifolds." (2002).

[7] Thurston, W. – Thurston, William P. "On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces." Bulletin (new series) of the american mathematical society 19.2 (1988) : 417-431.