

Difféomorphismes des surfaces

José Andrés RODRÍGUEZ MIGUELES

Université de Rennes 1

19 mai 2016, Séminaire "Pampers"

- 1 $O(3) \hookrightarrow \text{Diff}(S^2)$
 - Orthogonalisation de la différentielle
 - Parabolique
 - Hyperbolique
 - Champ vectoriel
- 2 **Théorème de Dehn-Nilsen-Baer**
 - $F : \text{Diff}(\Sigma_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$
 - $\pi_0(\text{Diff}(\Sigma_1)) \cong \text{Out}(\pi_1(\Sigma_1))$
- 3 **Cas $g \geq 2$**
 - Premier pas
 - Lié à l'infini
 - Fin de la démonstration

Proposition

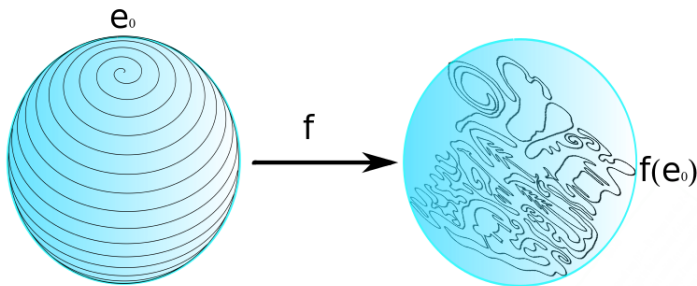
$O(3) \hookrightarrow \text{Diff}(S^2)$ est une rétraction par déformation.

$F : \text{Diff}(S^2) \times I \rightarrow \text{Diff}(S^2)$ où $F(f, 0) = f$, $F(f, 1) \in O(3)$ et $F_{1O(3)} = \text{id}_{O(3)}$.

Proposition

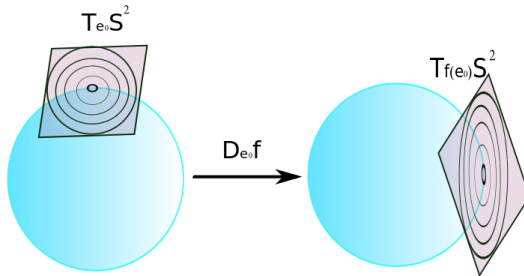
$O(3) \hookrightarrow \text{Diff}(S^2)$ est une rétraction par déformation.

$F : \text{Diff}(S^2) \times I \rightarrow \text{Diff}(S^2)$ où $F(f, 0) = f$, $F(f, 1) \in O(3)$ et $F_{1O(3)} = \text{id}_{O(3)}$.

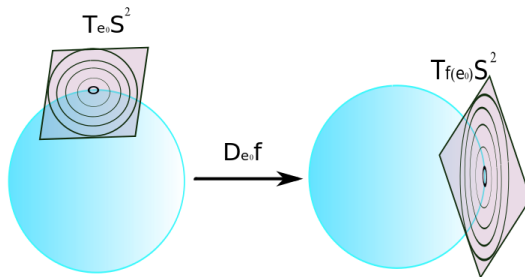


Grâce au processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt on homotope $X_0 = D_{e_0}f$ à $X_1 \in O(3)$.

Grâce au processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt on homotope $X_0 = D_{e_0}f$ à $X_1 \in O(3)$.



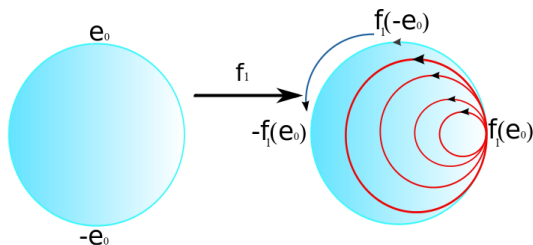
Grâce au processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt on homotope $X_0 = D_{e_0}f$ à $X_1 \in O(3)$.



$$H : S^2 \times I \rightarrow S^2 \quad \text{où} \quad H_t = \frac{X_t X_0^{-1} f}{\|X_t X_0^{-1} f\|} \quad \text{et} \quad f_1 := H_1$$

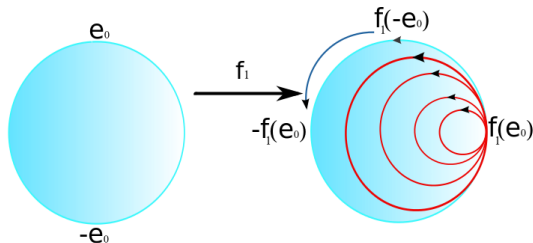
$$P_t^0(z) = z + t(i(-f_1(e_0)) - i(f_1(-e_0)))$$

où $i \in \text{Möb}(\mathbb{C} \cup \infty)$, $i(\infty) = f_1(e_0)$.



$$P_t^0(z) = z + t(i(-f_1(e_0)) - i(f_1(-e_0)))$$

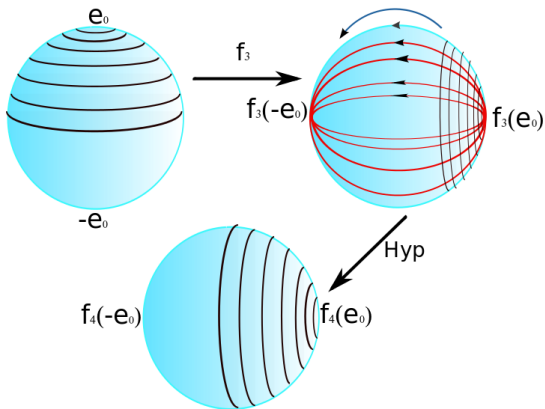
où $i \in \text{Möb}(\mathbb{C} \cup \infty)$, $i(\infty) = f_1(e_0)$.



Soit $P_t = i^{-1} \circ P_t^0 \circ i$, $H_t^0 = P_t \circ f_1$ et $f_2 := H_1^0$

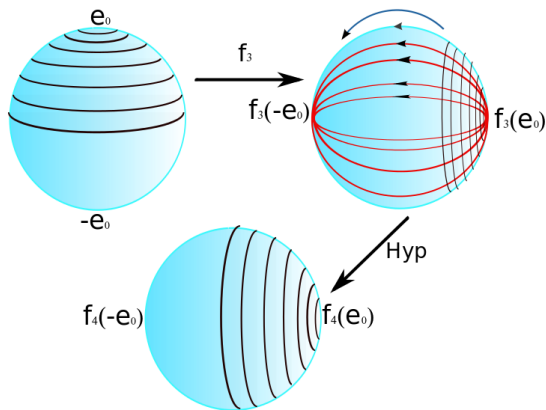
Hyperbolique

$$H_t^1 = \frac{(1-t\phi)f_2 + (t\phi)X_1}{\|(1-t\phi)f_2 + (t\phi)X_1\|} \quad \text{où} \quad \phi : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow [0, 1] \quad \text{et} \quad f_3 := H_1^1.$$



Hyperbolique

$$H_t^1 = \frac{(1-t\phi)f_2 + (t\phi)X_1}{\|(1-t\phi)f_2 + (t\phi)X_1\|} \quad \text{où} \quad \phi : \mathbb{R}^3 \times I \rightarrow [0, 1] \quad \text{et} \quad f_3 := H_1^1.$$



On dilate la parti qui coïncide avec X_1 par $Hyp \in \text{Möb}(S^2)$ tel que il fix $f_3(-e_0)$ et $f_3(e_0)$, jusqu'à ce qu'il atteigne la demi-sphère.

On peut supposer que f est l'identité sur la demi-sphère. Par projection stéréographique de e_0 , on a $h \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ égal à l'identité dehors le cercle unitaire.

On peut supposer que f est l'identité sur la demi-sphère. Par projection stéréographique de e_0 , on a $h \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ égal à l'identité dehors le cercle unitaire.

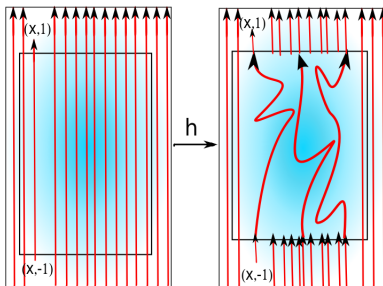


Figure: $h(x, y) = \phi^{V_0}(1 + y, (x, -1))$

Soit V_0 le champ vectoriel sur $\mathbb{R}^2$ induite l'image du champ constante $(0, 1)$ par Dh .

On peut supposer que f est l'identité sur la demi-sphère. Par projection stéréographique de e_0 , on a $h \in \text{Diff}(\mathbb{R}^2)$ égal à l'identité dehors le cercle unitaire.

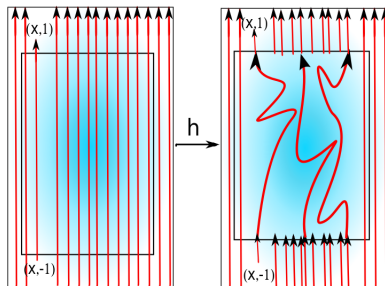


Figure: $h(x, y) = \phi^{V_0}(1 + y, (x, -1))$

Soit V_0 le champ vectoriel sur $\mathbb{R}^2$ induite l'image du champ constant $(0, 1)$ par Dh . Il y a une homotopie $V_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow S^1$ de V_0 au champ constant $V_1 = (0, 1)$.

FAIT: Toute trajectoire qui commence en $\{-1\} \times [-1, 1]$ finis en $\{1\} \times [-1, 1]$. (POINCAIRE-BENDIXON)

FAIT: Toute trajectoire qui commence en $\{-1\} \times [-1, 1]$ finis en $\{1\} \times [-1, 1]$. (POINCAIRE-BENDIXON)

On multiplie V_t par une fonction scalaire tel que les respectives trajectoires font le même temps égal à 2 pour aller de $\{-1\} \times [-1, 1]$ à $\{1\} \times [-1, 1]$.

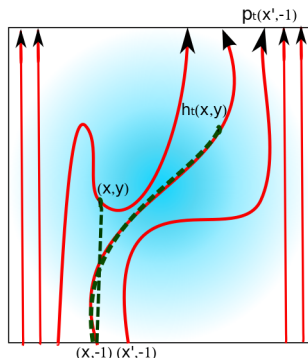
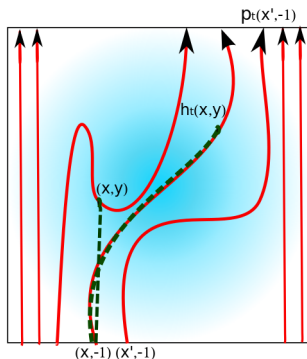


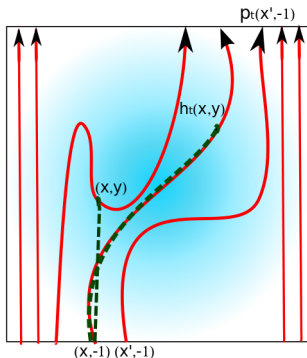
Figure: $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$

$$h_t \in \text{Diff}(Q) \quad \text{tel que} \quad h_t(x, y) = \phi^{V_t}(1 + y, (x, -1)).$$

$h_t \in \text{Diff}(Q)$ tel que $h_t(x, y) = \phi_t^V(1 + y, (x, -1))$.
 $p_t \in \text{Diff}([-1, 1])$ tel que $p_t(x) = \text{proj}_1(h_t(x, 1))$.



$h_t \in \text{Diff}(Q)$ tel que $h_t(x, y) = \phi^{V_t}(1 + y, (x, -1))$.
 $p_t \in \text{Diff}([-1, 1])$ tel que $p_t(x) = \text{proj}_1(h_t(x, 1))$.



$g_t \in \text{Diff}(Q)$ tel que $g_t(x, -1) = \text{id}(x, -1)$, $g_0 = \text{id}_Q = g_1$
 $g_t(x, 1) = (p_t^{-1}(x), 1)$ et $\text{proj}_2 \circ g_t = \text{proj}_2$.

$$\begin{aligned} g_t \circ h_t(x, -1) &= g_t(\phi^{V_t}(0, (x, -1))) = g_t(x, -1) = (x, -1) \\ g_t \circ h_t(x, 1) &= g_t(p_t(x), 1) = (x, 1) \end{aligned}$$

$$g_t \circ h_t \in \text{Diff}(Q) \quad g_t \circ h_t(\partial Q) = \text{id}_{\partial Q},$$

$$\begin{aligned}g_t \circ h_t(x, -1) &= g_t(\phi^{V_t}(0, (x, -1))) = g_t(x, -1) = (x, -1) \\g_t \circ h_t(x, 1) &= g_t(p_t(x), 1) = (x, 1)\end{aligned}$$

$$g_t \circ h_t \in \text{Diff}(Q) \quad g_t \circ h_t(\partial Q) = \text{id}_{\partial Q},$$

$$g_0 \circ h_0 = h|_Q \quad \text{et} \quad g_1 \circ h_1 = \text{id}_Q$$

ils s'étendent comme l'identité dehors Q . Alors on a une difféotopie entre h et id .

$$\therefore f \sim X_1 \in O(3).$$

$$\begin{aligned}g_t \circ h_t(x, -1) &= g_t(\phi^{V_t}(0, (x, -1))) = g_t(x, -1) = (x, -1) \\g_t \circ h_t(x, 1) &= g_t(p_t(x), 1) = (x, 1)\end{aligned}$$

$$g_t \circ h_t \in \text{Diff}(Q) \quad g_t \circ h_t(\partial Q) = \text{id}_{\partial Q},$$

$$g_0 \circ h_0 = h|_Q \quad \text{et} \quad g_1 \circ h_1 = \text{id}_Q$$

ils s'étendent comme l'identité dehors Q . Alors on a une difféotopie entre h et id .

$$\therefore f \sim X_1 \in O(3).$$

Corollaire

Toute $f \in \text{Diff}(S^2)$ se prolonge à une difféomorphisme de B^3 .

$$F : \text{Diff}(\Sigma_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$$

Théorème

Soit Σ une surface fermée. Alors toute homeomorphisme de Σ est isotope à une difféomorphisme de Σ . De plus, on peut remplacer toute isotopie entre difféomorphismes à une difféotopie entre eux.

$$F : \text{Diff}(\Sigma_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$$

Théorème

Soit Σ une surface fermée. Alors toute homeomorphisme de Σ est isotope à une difféomorphisme de Σ . De plus, on peut remplacer toute isotopie entre difféomorphismes à une difféotopie entre eux.

$$\phi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g \quad \longmapsto \quad \phi_* : \pi_1(\Sigma_g, p) \rightarrow \pi_1(\Sigma_g, \phi(p))$$

Soit γ chemin de p à $\phi(p)$ donc on a

$\Theta_\gamma : \pi_1(\Sigma_g, \phi(p)) \rightarrow \pi_1(\Sigma_g, p)$ tel que $\Theta_\gamma([\alpha]) = [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}]$.

$$F : \phi \quad \longmapsto \quad \phi_*^\gamma := \Theta_\gamma \circ \phi_* \quad \longmapsto \quad \{\phi_*^\gamma\} \in \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$$

$$F : \text{Diff}(\Sigma_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$$

Théorème

Soit Σ une surface fermée. Alors toute homeomorphisme de Σ est isotope à une difféomorphisme de Σ . De plus, on peut remplacer toute isotopie entre difféomorphismes à une difféotopie entre eux.

$$\phi : \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g \quad \longmapsto \quad \phi_* : \pi_1(\Sigma_g, p) \rightarrow \pi_1(\Sigma_g, \phi(p))$$

Soit γ chemin de p à $\phi(p)$ donc on a

$\Theta_\gamma : \pi_1(\Sigma_g, \phi(p)) \rightarrow \pi_1(\Sigma_g, p)$ tel que $\Theta_\gamma([\alpha]) = [\gamma * \alpha * \bar{\gamma}]$.

$$F : \phi \quad \longmapsto \quad \phi_*^\gamma := \Theta_\gamma \circ \phi_* \quad \longmapsto \quad \{\phi_*^\gamma\} \in \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$$

Remarque

- F ne dépende pas du choix de γ .

-Si ϕ_0 isotope à ϕ_1 , donc $F(\phi_0) = F(\phi_1)$.

$$F : \text{Diff}(\Sigma_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$$

$$\sigma : \pi_0(\text{Homeo}(\Sigma_g)) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$$

$$\text{MCG}^\pm(\Sigma_g) := \pi_0(\text{Homeo}(\Sigma_g))$$

Théorème

Soit $g \geq 1$. Le homomorphisme

$$\sigma : \text{MCG}^\pm(\Sigma_g) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(\Sigma_g))$$

est une isomorphisme.

$$\pi_0(\text{Diff}(\Sigma_1)) \cong \text{Out}(\pi_1(\Sigma_1))$$

Comme $\pi_1(\Sigma_1) \cong \mathbb{Z}^2$ alors

$$\text{Out}(\pi_1(\Sigma_1)) = \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_1)) \cong GL_2(\mathbb{Z})$$

$$\pi_0(\text{Diff}(\Sigma_1)) \cong \text{Out}(\pi_1(\Sigma_1))$$

Comme $\pi_1(\Sigma_1) \cong \mathbb{Z}^2$ alors

$$\text{Out}(\pi_1(\Sigma_1)) = \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_1)) \cong GL_2(\mathbb{Z})$$

-Surjective: Soit $A \in GL_2(\mathbb{Z})$

$$\begin{array}{ccc} u \in \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f_A} & Au \in \mathbb{R}^2 \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\bar{f}_A} & \Sigma_1 \end{array}$$

$$\sigma([\bar{f}_A]) = A.$$

$$\pi_0(\text{Diff}(\Sigma_1)) \cong \text{Out}(\pi_1(\Sigma_1))$$

-Injective: Soit $\phi \in \text{Homeo}(\Sigma_1)$

$\sigma([\phi]) = id_{\mathbb{Z}^2}$ alors $\phi_*^\gamma = id_{\mathbb{Z}^2}$ et $\phi_* = \Theta_{\bar{\gamma}}$

$$\pi_0(\text{Diff}(\Sigma_1)) \cong \text{Out}(\pi_1(\Sigma_1))$$

-Injective: Soit $\phi \in \text{Homeo}(\Sigma_1)$

$$\sigma([\phi]) = id_{\mathbb{Z}^2} \text{ alors } \phi_*^\gamma = id_{\mathbb{Z}^2} \text{ et } \phi_* = \Theta_{\bar{\gamma}}$$

FAIT: Il exist $\psi \sim id_{\Sigma_1}$ tel que $\psi_* = \Theta_{\bar{\gamma}}$.

$$\pi_0(\text{Diff}(\Sigma_1)) \cong \text{Out}(\pi_1(\Sigma_1))$$

-Injective: Soit $\phi \in \text{Homeo}(\Sigma_1)$

$$\sigma([\phi]) = id_{\mathbb{Z}^2} \text{ alors } \phi_*^\gamma = id_{\mathbb{Z}^2} \text{ et } \phi_* = \Theta_{\bar{\gamma}}$$

FAIT: Il exist $\psi \sim id_{\Sigma_1}$ tel que $\psi_* = \Theta_{\bar{\gamma}}$.

FAIT: Comme Σ_1 est une CW -complexe et $\tilde{\Sigma}_1$ contractile.
Alors

$$\phi \sim \psi \sim id.$$

$$\pi_0(\text{Diff}(\Sigma_1)) \cong \text{Out}(\pi_1(\Sigma_1))$$

-Injective: Soit $\phi \in \text{Homeo}(\Sigma_1)$

$$\sigma([\phi]) = id_{\mathbb{Z}^2} \text{ alors } \phi_*^\gamma = id_{\mathbb{Z}^2} \text{ et } \phi_* = \Theta_{\bar{\gamma}}$$

FAIT: Il exist $\psi \sim id_{\Sigma_1}$ tel que $\psi_* = \Theta_{\bar{\gamma}}$.

FAIT: Comme Σ_1 est une CW -complexe et $\tilde{\Sigma}_1$ contractile.
Alors

$$\phi \sim \psi \sim id.$$

Remarque

L'injectivité pour $g \geq 2$ se montre de la même façon.

-Surjective: Soit $f \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$

Définition

Une chaîne sur Σ_g une suite finie de courbes fermées simples orientées $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, pour certain $n \in \mathbb{N}$, qui vérifient pour tout $1 \leq k \leq n-1$ que $\langle \alpha_k, \alpha_{k+1} \rangle$ ne dépend pas de k , $i(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = 1$ et $i(\alpha_k, \alpha_j) = 0$ pour $|k-j| > 1$.

-Surjective: Soit $f \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$

Définition

Une chaîne sur Σ_g une suite finie de courbes fermées simples orientées $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, pour certain $n \in \mathbb{N}$, qui vérifient pour tout $1 \leq k \leq n-1$ que $\langle \alpha_k, \alpha_{k+1} \rangle$ ne dépend pas de k , $i(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = 1$ et $i(\alpha_k, \alpha_j) = 0$ pour $|k-j| > 1$.

Théorème

Soient Σ_g une surface fermée, connexe, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, deux chaînes de courbes fermées simples, non-séparantes sur Σ_g . Alors il exist $h \in \text{Homeo}(\Sigma_g)$ tel que $h(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

-Surjective: Soit $f \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$

Définition

Une chaîne sur Σ_g une suite finie de courbes fermées simples orientées $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, pour certain $n \in \mathbb{N}$, qui vérifient pour tout $1 \leq k \leq n-1$ que $\langle \alpha_k, \alpha_{k+1} \rangle$ ne dépend pas de k , $i(\alpha_k, \alpha_{k+1}) = 1$ et $i(\alpha_k, \alpha_j) = 0$ pour $|k-j| > 1$.

Théorème

Soient Σ_g une surface fermée, connexe, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$, deux chaînes de courbes fermées simples, non-séparantes sur Σ_g . Alors il exist $h \in \text{Homeo}(\Sigma_g)$ tel que $h(\alpha_i) = \beta_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

-Suffit montrer que si $(c_1, \dots, c_{2g})$ une chaîne de courbes fermées simples donc $(f(c_1), \dots, f(c_{2g}))$ l'est aussi.

$$\begin{array}{ccc} g \in \pi_1(\Sigma_g) & \xrightarrow{f} & \pi_1(\Sigma_g) \\ \downarrow & & \downarrow \text{MILNOR-SVARC} \\ g \cdot x_0 \in \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\text{Q.I. f-equiv}} & \mathbb{H}^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 g \in \pi_1(\Sigma_g) & \xrightarrow{f} & \pi_1(\Sigma_g) \\
 \downarrow & & \downarrow \text{MILNOR-SVARC} \\
 g \cdot x_0 \in \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\text{Q.I. f-equiv}} & \mathbb{H}^2
 \end{array}$$

$-h : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ (K, C) –quasi-isométrie :

$$\frac{1}{K} d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(h(x_1), h(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2) + C.$$

$$\begin{array}{ccc}
 g \in \pi_1(\Sigma_g) & \xrightarrow{f} & \pi_1(\Sigma_g) \\
 \downarrow & & \downarrow \text{MILNOR-SVARC} \\
 g \cdot x_0 \in \mathbb{H}^2 & \xrightarrow{\text{Q.I. f-equiv}} & \mathbb{H}^2
 \end{array}$$

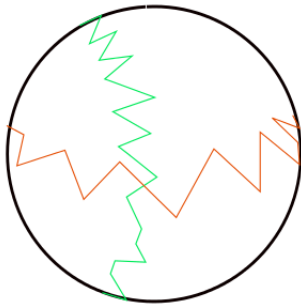
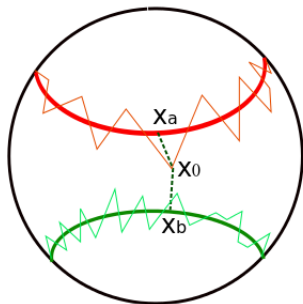
$-h : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y) (K, C)$ —quasi-isométrie :

$$\frac{1}{K}d_X(x_1, x_2) - C \leq d_Y(h(x_1), h(x_2)) \leq Kd_X(x_1, x_2) + C.$$

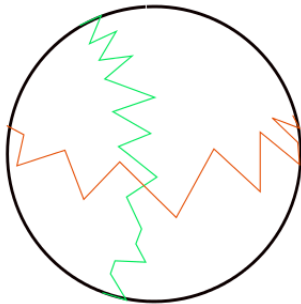
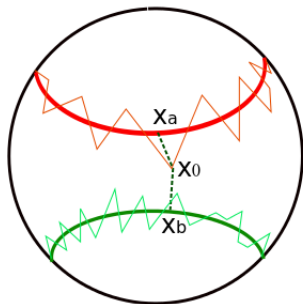
-MILNOR-SVARC: $G \curvearrowright X$ (espace métrique propre géodésique) par isométries de façon proprement et discontinument et cocompact. Alors G est quasi-isométrique à X .

On dit que $a, b \in \pi_1(\Sigma_g)$ sont liés à l'infini si $Ax(a) \cap Ax(b)$ est un point de $\mathbb{H}^2$.

On dit que $a, b \in \pi_1(\Sigma_g)$ sont liés à l'infini si $Ax(a) \cap Ax(b)$ est un point de $\mathbb{H}^2$.



On dit que $a, b \in \pi_1(\Sigma_g)$ sont liés à l'infini si $Ax(a) \cap Ax(b)$ est un point de $\mathbb{H}^2$.



Lemme

Soit $g \geq 2$. Revêtement fixé et $f \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$. $f(a)$ et $f(b)$ sont liés à l'infini si et seulement si a et b sont liés à l'infini.

Lemme

Soit $g \geq 2$. Revêtement fixé et $f \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$. $f(a)$ et $f(b)$ sont liés à l'infini si et seulement si a et b sont liés à l'infini.

Preuve: Soit a, b non liés à l'infini et $R > 0$. $\exists N(R) \in \mathbb{N}$:

$$O_a = \{a^k \cdot x_0 \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad O_{b^{N(R)}} = \{b^{kN(R)} \cdot x_0 \mid k \in \mathbb{Z}^*\}$$

$$\text{dist}(O_a, O_{b^{N(R)}}) > R.$$

Lemme

Soit $g \geq 2$. Revêtement fixé et $f \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$. $f(a)$ et $f(b)$ sont liés à l'infini si et seulement si a et b sont liés à l'infini.

Preuve: Soit a, b non liés à l'infini et $R > 0$. $\exists N(R) \in \mathbb{N}$:

$$O_a = \{a^k \cdot x_0 \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad O_{b^{N(R)}} = \{b^{kN(R)} \cdot x_0 \mid k \in \mathbb{Z}^*\}$$

$$\text{dist}(O_a, O_{b^{N(R)}}) > R.$$

Relie les points de chaque orbite par géodésiques α_i et β_j tel que: $\text{dist}(\beta_j, \beta_{j+1}) < 2D$ et $\text{dist}(\beta_j, Ax(a)) > R$.

Lemme

Soit $g \geq 2$. Revêtement fixé et $f \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma_g))$. $f(a)$ et $f(b)$ sont liés à l'infini si et seulement si a et b sont liés à l'infini.

Preuve: Soit a, b non liés à l'infini et $R > 0$. $\exists N(R) \in \mathbb{N}$:

$$O_a = \{a^k \cdot x_0 \mid k \in \mathbb{Z}\} \quad O_{b^{N(R)}} = \{b^{kN(R)} \cdot x_0 \mid k \in \mathbb{Z}^*\}$$

$$\text{dist}(O_a, O_{b^{N(R)}}) > R.$$

Relie les points de chaque orbite par géodésiques α_i et β_j tel que: $\text{dist}(\beta_j, \beta_{j+1}) < 2D$ et $\text{dist}(\beta_j, Ax(a)) > R$.

Si $f(a), f(b)$ sont liés à l'infini $\exists n, m \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{K}(R-C) < \text{dist}(f(\alpha_n), f(\beta_m)) < \text{dist}(f(\alpha_n), f(\alpha_{n+1})) < 2DK+C.$$

Soit $(c_1, \dots, c_{2g})$ une chaîne de courbes fermées simples

- 1) La classe de conjugaison d'un élément primitif $f(c_i)$ a une représentant simple $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de $f(c_i)$ ne sont liés à l'infini

Soit $(c_1, \dots, c_{2g})$ une chaîne de courbes fermées simples

- 1) La classe de conjugaison d'un élément primitif $f(c_i)$ a une représentant simple $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de $f(c_i)$ ne sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de c_i ne sont liés à l'infini.

Soit $(c_1, \dots, c_{2g})$ une chaîne de courbes fermées simples

- 1) La classe de conjugaison d'un élément primitif $f(c_i)$ a une représentant simple $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de $f(c_i)$ ne sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de c_i ne sont liés à l'infini.
- 2) $i(f(c_k), f(c_j)) = 0$ pour $|k - j| > 1 \Leftrightarrow$ n'existe pas des représentants de $f(c_k), f(c_j)$ qui sont liés à l'infini

Soit $(c_1, \dots, c_{2g})$ une chaîne de courbes fermées simples

- 1) La classe de conjugaison d'un élément primitif $f(c_i)$ a une représentant simple $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de $f(c_i)$ ne sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de c_i ne sont liés à l'infini.
- 2) $i(f(c_k), f(c_j)) = 0$ pour $|k - j| > 1 \Leftrightarrow$ n'existe pas des représentants de $f(c_k), f(c_j)$ qui sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ n'existe pas des représentantes de c_k, c_j qui sont liés à l'infini.

Soit $(c_1, \dots, c_{2g})$ une chaîne de courbes fermées simples

- 1) La classe de conjugaison d'un élément primitif $f(c_i)$ a une représentant simple $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de $f(c_i)$ ne sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de c_i ne sont liés à l'infini.
- 2) $i(f(c_k), f(c_j)) = 0$ pour $|k - j| > 1 \Leftrightarrow$ n'existe pas des représentants de $f(c_k), f(c_j)$ qui sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ n'existe pas des représentantes de c_k, c_j qui sont liés à l'infini.
- 3) $i(f(c_k), f(c_{k+1})) = 1 \Leftrightarrow \exists$ représentants de $f(c_k), f(c_{k+1})$ qui sont liés à l'infini

Soit $(c_1, \dots, c_{2g})$ une chaîne de courbes fermées simples

- 1) La classe de conjugaison d'un élément primitif $f(c_i)$ a une représentant simple $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de $f(c_i)$ ne sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de c_i ne sont liés à l'infini.
- 2) $i(f(c_k), f(c_j)) = 0$ pour $|k - j| > 1 \Leftrightarrow$ n'existe pas des représentants de $f(c_k), f(c_j)$ qui sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ n'existe pas des représentantes de c_k, c_j qui sont liés à l'infini.
- 3) $i(f(c_k), f(c_{k+1})) = 1 \Leftrightarrow \exists$ représentants de $f(c_k), f(c_{k+1})$ qui sont liés à l'infini $\Leftrightarrow \exists$ représentants de c_k, c_{k+1} qui sont liés à l'infini.

Soit $(c_1, \dots, c_{2g})$ une chaîne de courbes fermées simples

- 1) La classe de conjugaison d'un élément primitif $f(c_i)$ a une représentant simple $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de $f(c_i)$ ne sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de c_i ne sont liés à l'infini.
- 2) $i(f(c_k), f(c_j)) = 0$ pour $|k - j| > 1 \Leftrightarrow$ n'existe pas des représentants de $f(c_k), f(c_j)$ qui sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ n'existe pas des représentantes de c_k, c_j qui sont liés à l'infini.
- 3) $i(f(c_k), f(c_{k+1})) = 1 \Leftrightarrow \exists$ représentants de $f(c_k), f(c_{k+1})$ qui sont liés à l'infini $\Leftrightarrow \exists$ représentants de c_k, c_{k+1} qui sont liés à l'infini.
- 4) $\langle f(c_k), f(c_{k+1}) \rangle$ a le même signe que $\langle f(c_{k+1}), f(c_{k+2}) \rangle \Leftrightarrow f(c_k) \cdot Ax(f(c_{k+1}))$ et $f(c_{k+2}) \cdot Ax(f(c_{k+1}))$ sont du même côté de $Ax(f(c_{k+1}))$

Soit $(c_1, \dots, c_{2g})$ une chaîne de courbes fermées simples

- 1) La classe de conjugaison d'un élément primitif $f(c_i)$ a une représentant simple $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de $f(c_i)$ ne sont liés à l'infini $\Leftrightarrow$ chaque paire de représentantes de c_i ne sont liés à l'infini.
- 2) $i(f(c_k), f(c_j)) = 0$ pour $|k - j| > 1 \Leftrightarrow$ n'existe pas des représentants de $f(c_k), f(c_j)$ qui sont liés à l'infinie $\Leftrightarrow$ n'existe pas des représentantes de c_k, c_j qui sont liés à l'infini.
- 3) $i(f(c_k), f(c_{k+1})) = 1 \Leftrightarrow \exists$ représentants de $f(c_k), f(c_{k+1})$ qui sont liés à l'infinie $\Leftrightarrow \exists$ représentants de c_k, c_{k+1} qui sont liés à l'infinie.
- 4) $\langle f(c_k), f(c_{k+1}) \rangle$ a le même signe que $\langle f(c_{k+1}), f(c_{k+2}) \rangle \Leftrightarrow f(c_k) \cdot Ax(f(c_{k+1}))$ et $f(c_{k+2}) \cdot Ax(f(c_{k+1}))$ sont du même côté de $Ax(f(c_{k+1})) \Leftrightarrow c_k \cdot Ax(c_{k+1})$ et $c_{k+2} \cdot Ax(c_{k+1})$ sont du même côté de $Ax(c_{k+1})$.

Alors il exist $\psi \in \text{Homeo}(\Sigma_1)$ tel que $\{\psi_*(c_i)\} = \{f(c_i)\}$. Il faut montrer que $H := \psi_*^{-1} \circ f \in \text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$.

Alors il exist $\psi \in \text{Homeo}(\Sigma_1)$ tel que $\{\psi_*(c_i)\} = \{f(c_i)\}$. Il faut montrer que $H := \psi_*^{-1} \circ f \in \text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$.

$$-H(c_1) = I_{a_1}(c_1).$$

Alors il exist $\psi \in \text{Homeo}(\Sigma_1)$ tel que $\{\psi_*(c_i)\} = \{f(c_i)\}$. Il faut montrer que $H := \psi_*^{-1} \circ f \in \text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$.

$$-H(c_1) = I_{a_1}(c_1).$$

-l'ensemble de représentantes de c_2 liés avec c_1 est donné par $I_{c_1^k}(c_2)$.

Alors il exist $\psi \in \text{Homeo}(\Sigma_1)$ tel que $\{\psi_*(c_i)\} = \{f(c_i)\}$. Il faut montrer que $H := \psi_*^{-1} \circ f \in \text{Inn}(\pi_1(\Sigma_g))$.

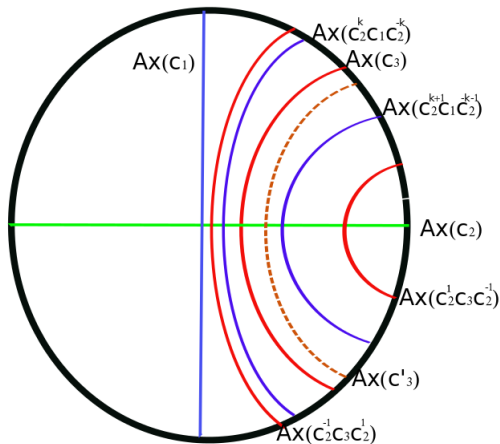
$$-H(c_1) = I_{a_1}(c_1).$$

-l'ensemble de représentantes de c_2 liés avec c_1 est donné par $I_{c_1^k}(c_2)$.

$$-I_{c_1^{-k} a_1} \circ H \text{ fix } c_1, c_2.$$

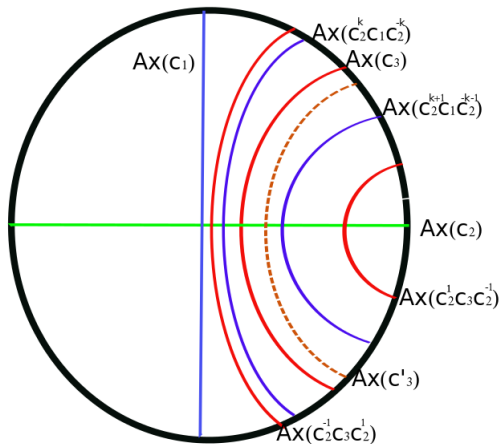
Fin de la démonstration

Soit $I_{c_1^{-k}a_1} \circ H(c_3) = c'_3$.



Fin de la démonstration

Soit $I_{c_1^{-k}a_1} \circ H(c_3) = c'_3$.



$$\therefore \{\psi_*^{-1} \circ f\} = \{id\}.$$

Fin de la démonstration

Références



Beson Frab et Dan Margalit

A primer on mapping class groups

Princeton university press, Princeton and Oxford.



Allen Hatcher

Algebraic Topology



Søren Kjærgaard Boldsen

Different versions of mapping class group on surfaces
arXiv:0908.2221, 2009.



William Thurston,

Three-Dimensional Geometry and Topology
Princeton university press, Princeton, 1997.