

Les valeurs propres sont dans Laplace

Exemples et applications. Et musique.

Pierre Monmarché

Séminaire doctorant multi-culturel de Rennes

- 1 Le laplacien
- 2 L'onde et la chaleur
- 3 Miscellanées
- 4 Les notes de musique

1 Le laplacien

2 L'onde et la chaleur

3 Miscellanées

4 Les notes de musique

Le laplacien

$$\Delta f(x) = \partial_{x_1}^2 f(x) + \cdots + \partial_{x_n}^2 f(x)$$

Courbure moyenne

Définition alternative :

$$\Delta f = \text{tr}(\text{Hess}(f))$$

où

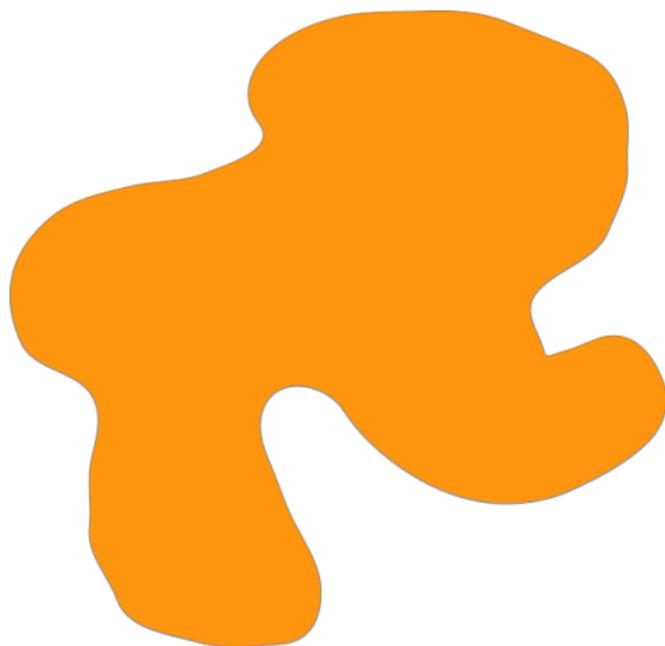
$$\text{Hess}(f) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}^2 f & \cdots & \partial_{x_1} \partial_{x_n} f \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_n} \partial_{x_1} f & \cdots & \partial_{x_n}^2 f \end{pmatrix}$$

⇒ ne dépend pas de la base orthonormale !

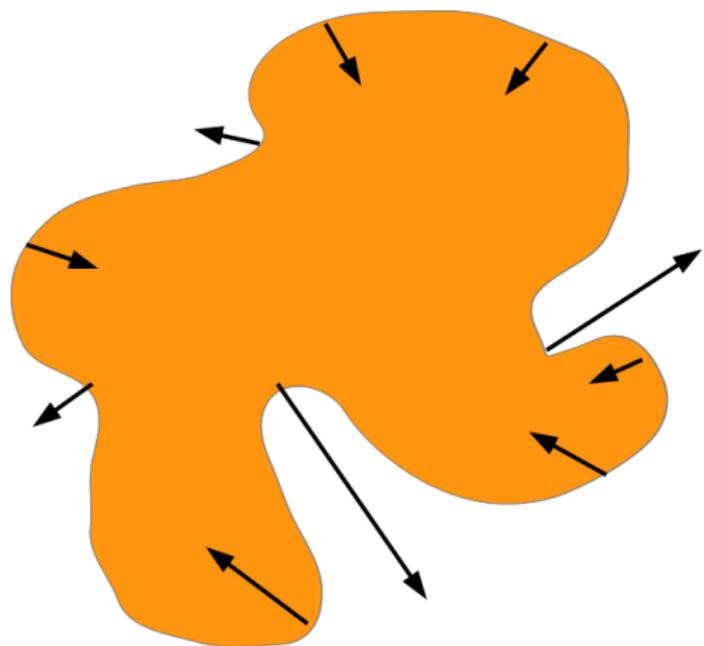
$\partial_{x_k}^2 f(x)$ = courbure de f dans la direction x_k en x .

⇒ Δf = courbure moyenne de f en x .

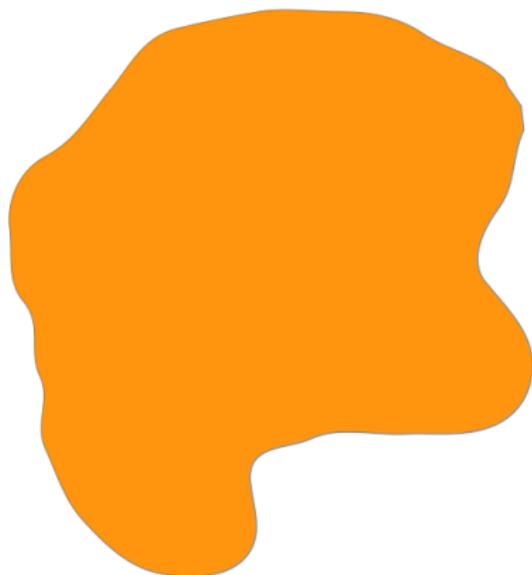
Mouvement par courbure moyenne



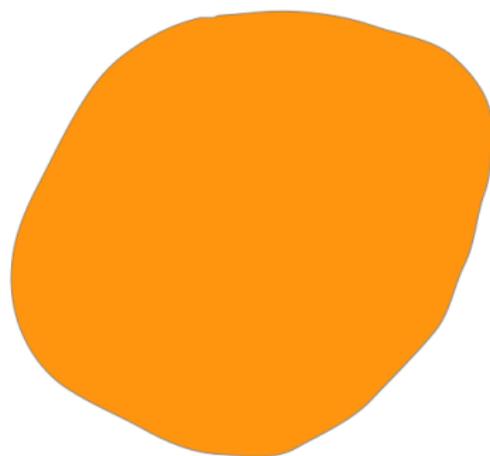
Mouvement par courbure moyenne



Mouvement par courbure moyenne



Mouvement par courbure moyenne



Mouvement par courbure moyenne

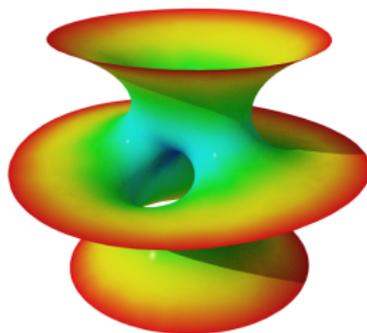
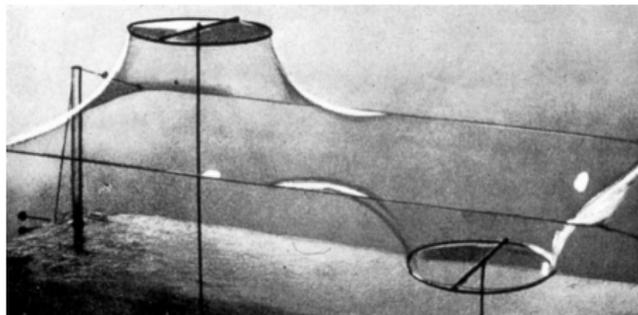
utilisé en imagerie :



ou bien pour modéliser des évolutions d'interface (colonies de bactéries ;
flaque d'huile dans de l'eau)

Surfaces minimales

On dit qu'une surface est minimale si sa courbure moyenne est nulle en tout point : une déformation locale ne peut qu'augmenter son air.



Moyenne locale

Par un développement de Taylor,

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(x + rz) dz \underset{r \rightarrow 0}{\simeq} f(x) + \frac{r^2}{2} \Delta f(x) + \underset{r \rightarrow 0}{o}(r^2).$$

Fonctions harmoniques

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(x + rz) dz = f(x) \quad \forall x, \forall r \Leftrightarrow \Delta f = 0.$$

C'est ce qu'on appelle une fonction harmonique.

Δf mesure le défaut local d'harmonicité de f ; c- -d   quel point f et sa moyenne locale diff rent.

Laplacien discret

Sur un graphe, si $V_u = \{v \sim u\}$ est le voisinage de u ,

$$\Delta_d f(u) = \frac{1}{|V_u|} \left(\sum_{v \sim u} f(v) \right) - f(u).$$

Par exemple en maillant \mathbb{R} d'un pas h ,

$$\begin{aligned} \Delta_d f(x) &= \frac{f(x+h) + f(x-h)}{2} - f(x) \\ &\simeq \frac{h^2}{2} f''(x) \end{aligned}$$

- discret \rightarrow continu : - idéalisation
- limite d'échelle
- continu \rightarrow discret : - bilan de matière à petits volumes
- schéma numérique

1 Le laplacien

2 L'onde et la chaleur

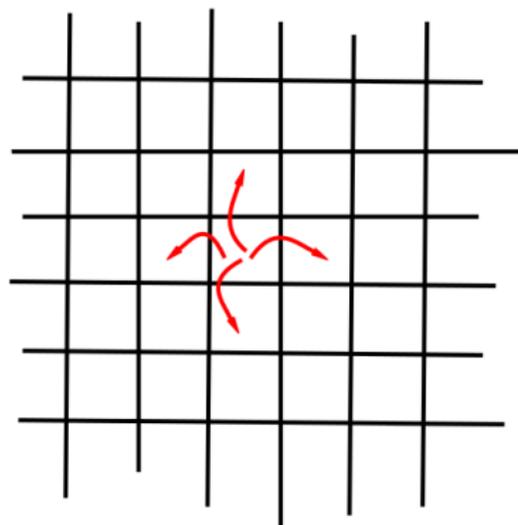
3 Miscellanées

4 Les notes de musique

Diffusion

$f_n(x)$ = nombre de particules dans la case x au temps n .

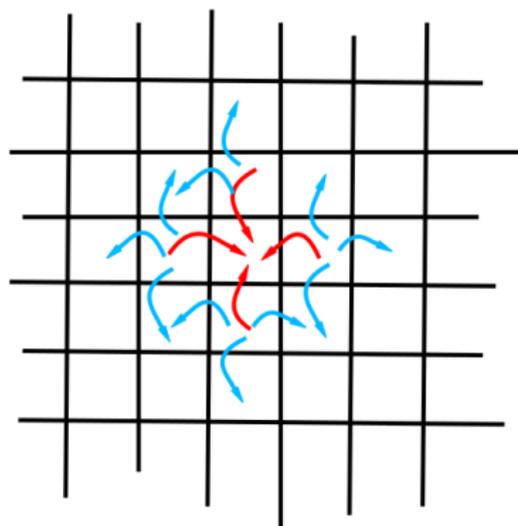
À chaque étape, les particules migrent (uniformément) vers les cases adjacentes.



Diffusion

En même temps, arrivent dans la case x le quart des populations voisines.

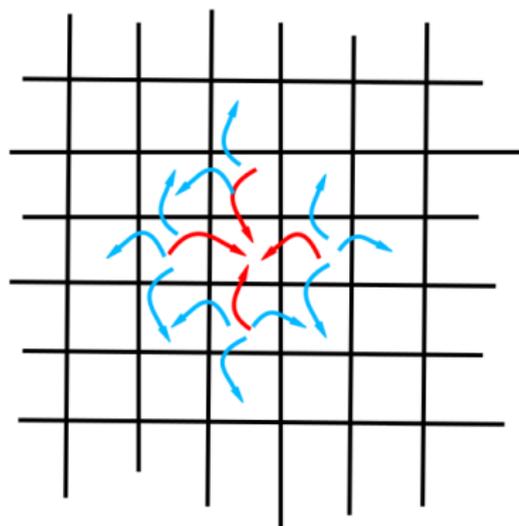
$$\Rightarrow f_{n+1}(x) = \frac{1}{4} \sum_{z \sim x} f_n(z)$$



Diffusion

En même temps, arrivent dans la case x le quart des populations voisines.

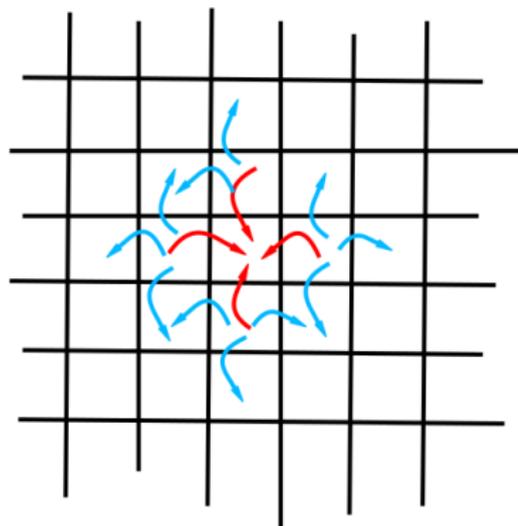
$$\Rightarrow f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{1}{4} \sum_{z \sim x} f_n(z) - f_n(x)$$



Diffusion

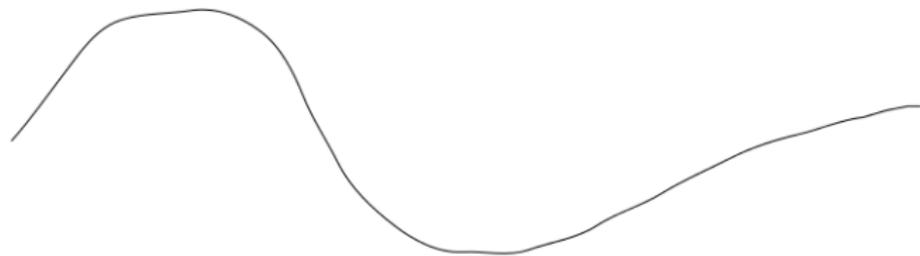
En même temps, arrivent dans la case x le quart des populations voisines.

$$\Rightarrow \quad \partial_t f(t, x) = \Delta f(t, x)$$



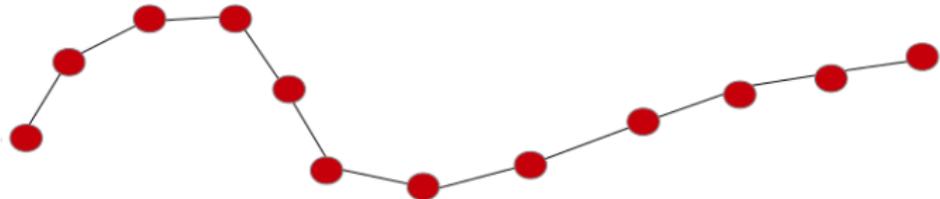
Équation des ondes

$h(x, t)$ = hauteur d'une corde fixée à ses extrémités.



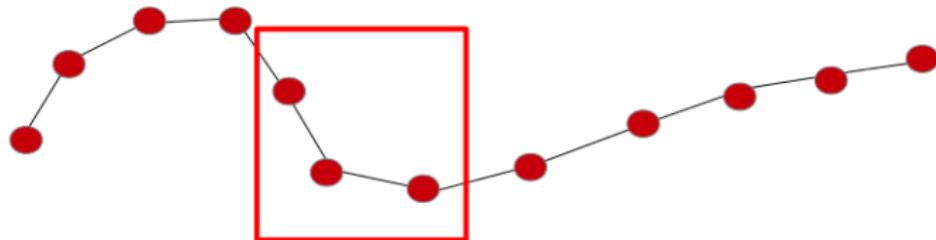
Équation des ondes

$h(x, t)$ = hauteur d'une corde fixée à ses extrémités.

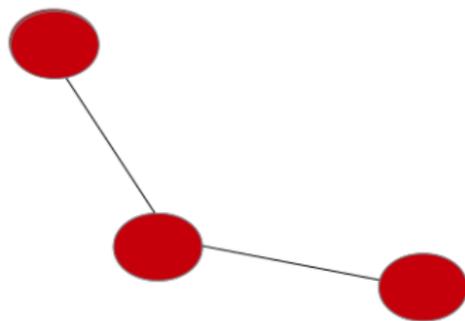


Équation des ondes

$h(x, t)$ = hauteur d'une corde fixée à ses extrémités.



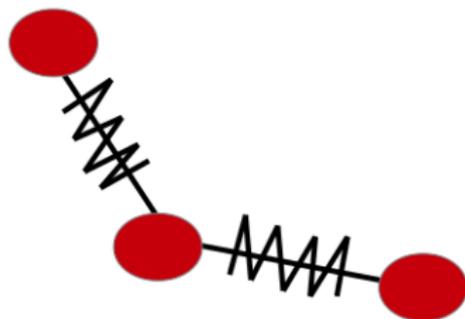
Équation des ondes



Équation des ondes

D'après la mécanique newtonienne,

$$mh_i''(t) = k(h_{i-1}(t) - h_i(t)) + k(h_{i+1}(t) - h_i(t))$$

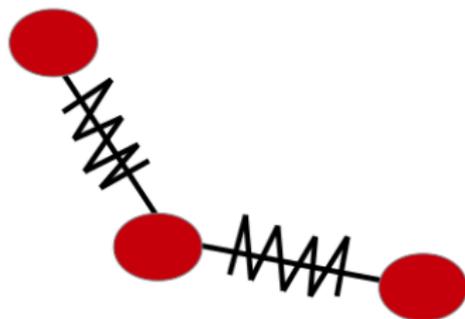


Équation des ondes

D'après la mécanique newtonienne,

$$mh_i''(t) = k(h_{i-1}(t) - h_i(t)) + k(h_{i+1}(t) - h_i(t))$$

$$\Rightarrow \partial_t^2 h(x_i, t) = \frac{2k}{m} \left(\frac{h(x_{i+1}, t) + h(x_{i-1}, t)}{2} - h(x_i, t) \right)$$



Limite d'échelle

Dézoom en espace + accélération du temps =

Équation de la chaleur et des ondes

$$\partial_t^k f = \Delta f$$

$k = 1$ ou 2 .

En cherchant f sous la forme $f(x, t) = a(x)b(t)$, on voit que c'est équivalent à

$$\begin{cases} \Delta a &= \mu a \\ \partial_t^k b &= \mu b \end{cases}$$

pour un certain $\mu \leq 0$. En particulier,

$$b(t) = \begin{cases} e^{-|\mu|t} & \text{pour la chaleur.} \\ \cos(\sqrt{|\mu|}t) & \text{pour les ondes.} \end{cases}$$

Équation de la chaleur et des ondes

- Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d
- $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ les valeurs propres de $-\Delta$ dans \mathcal{H}_0^1
- f_i les fonctions propres associées
- $f_0 = \sum a_i f_i$ une condition initiale

La solution de

$$\begin{cases} \partial_t f = \Delta f & \text{sur } \Omega \\ f = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ f(x, 0) = f_0(x) \end{cases}$$

est

$$f(x, t) = \sum a_i e^{-\lambda_i t} f_i(x).$$

Équation de la chaleur et des ondes

- Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d
- $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ les valeurs propres de $-\Delta$ dans \mathcal{H}_0^1
- f_i les fonctions propres associées
- $f_0 = \sum a_i f_i$ une condition initiale

La solution de

$$\begin{cases} \partial_t f &= \Delta f & \text{sur } \Omega \\ f &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ f(x, 0) &= f_0(x) \end{cases}$$

est

$$f(x, t) = \sum a_i e^{-\lambda_i t} f_i(x).$$

[cf. animations]

1 Le laplacien

2 L'onde et la chaleur

3 Miscellanées

4 Les notes de musique

Résonance

Solution particulière de l'équation

$$x'' + \nu^2 x = \cos(\omega t).$$

- Si $\nu \neq \omega$,

$$x(t) = \frac{1}{\nu^2 - \omega^2} \cos(\omega t)$$

- Si $\nu = \omega$,

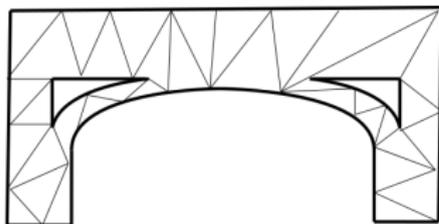
$$x(t) = \frac{t}{2\omega} \sin(\omega t)$$



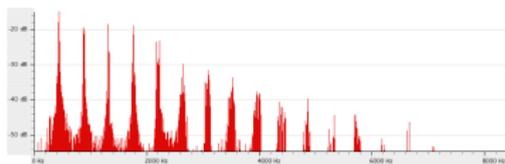
Résonance

spectre du Laplacien \leftrightarrow fréquences propres (de résonance)

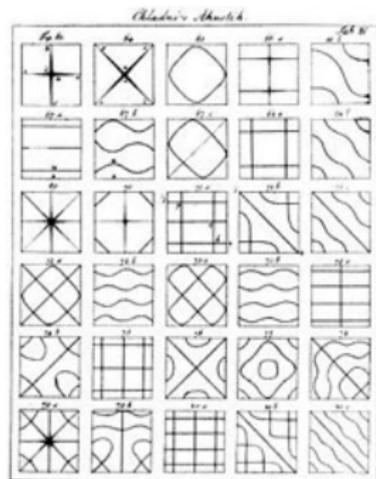
- Genie civil, robotique : éviter les résonances



- Musique : cuivres (trompettes) ; simulations numériques



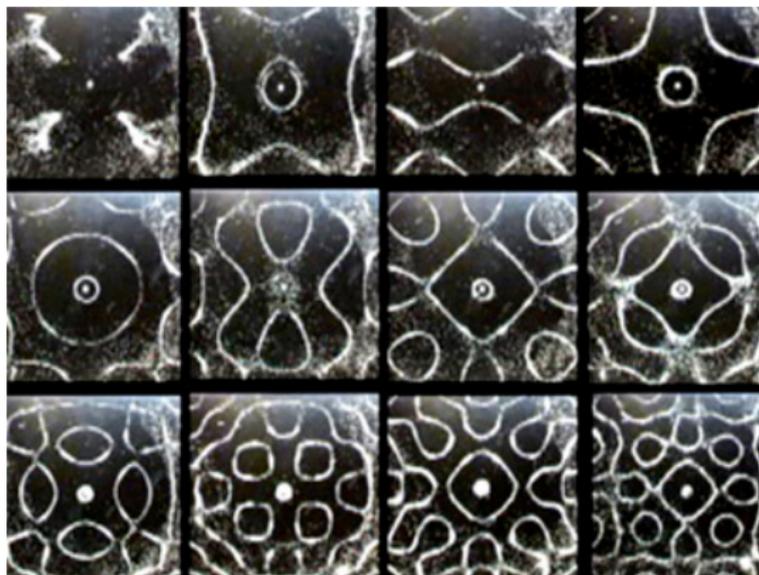
Les figures de Chladni



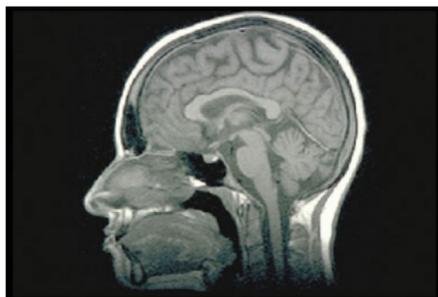
En 1809 le mathématicien Chladni était invité à présenter une étonnante expérience devant Napoléon.

Ça ressemblait à ça.

Les figures de Chladni



Problème inverse



Observation d'une onde

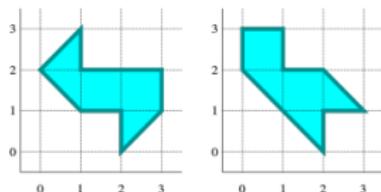
→ connaissance de ses fréquences

→ connaissance du spectre de l'objet.

Question : "can one hear the shape of a drum ?" (Kac, 1966)

Géométrie spectrale

Contre exemple (Gordon, Webb et Wolpert, 1991) :



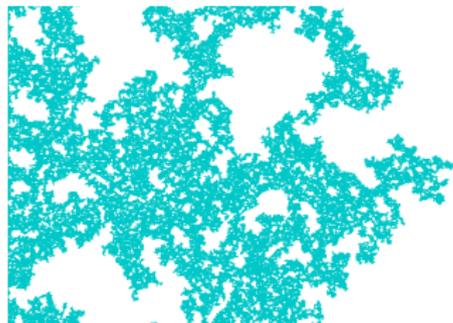
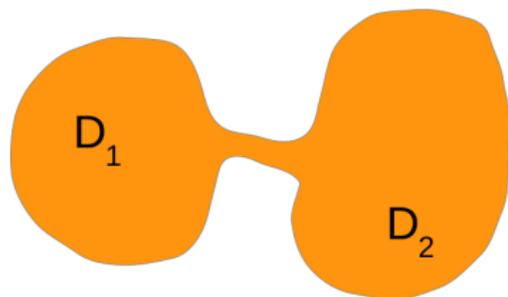
En revanche c'est vrai si l'on ne considère que des tambours convexes à frontière analytique (Zelditch, 2000).

On tire des informations géométriques des coefficients a_k définis par :

$$\sum_{i \geq 1} e^{-\lambda_i t} \sim t^{-\frac{d}{2}} \sum_{k \geq 0} a_k t^{\frac{k}{2}}.$$

Goulet d'étranglement

$\lambda_1 \ll \lambda_2$ est typique des systèmes multi-échelles ou métastable.



La température s'homogénéise en un temps $\sim \frac{1}{\lambda_2}$ dans chaque domaine ;
et en un temps $\sim \frac{1}{\lambda_1}$ entre eux.

(idem pour le temps de visite d'un brownien).

\Rightarrow problème d'algorithmique (\sim mauvais conditionnement de matrice)

Isopérimétrie

Théorème (Faber-Krahn 1923)

D un domaine de \mathbb{R}^d , B la boule euclidienne de même volume, alors

$$\lambda_1(D) \geq \lambda_1(B)$$

autrement dit “un tambour bizarre est toujours plus aigüe que son équivalent rond”.

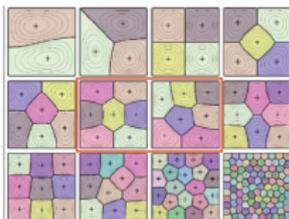
Inégalité de Cheeger

$$\inf_{A \subset D} \frac{|\partial A|}{\min(\text{vol}(A), \text{vol}(A^c))} \leq 2\sqrt{\lambda_1(D)}.$$

Partitions spectrales minimales

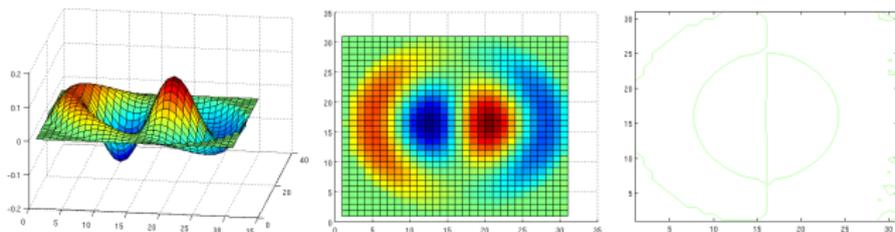
Problème : subdiviser un domaine en sous-domaine D_k en minimisant

$$\max_k (\lambda_1(D_k)).$$



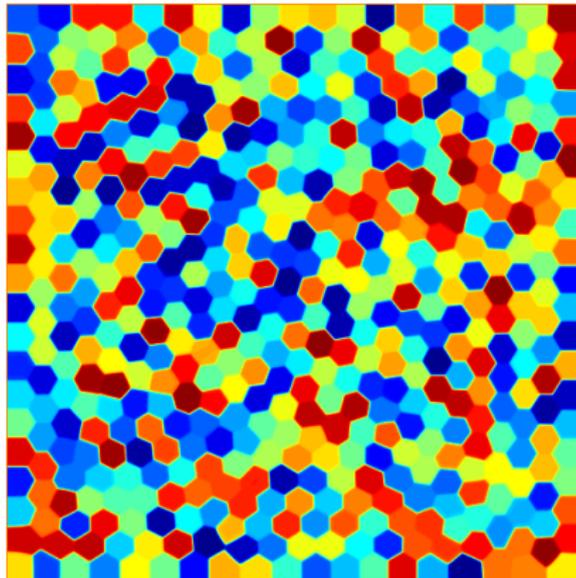
"Minimization of the Renyi entropy production in the space-partitioning process"
Cybulski, Babin, and Holyst, Phys. Rev. E 71, 046130 (2005)

Solution envisagée : soit f_k fonction propre associée à λ_k , on délimite les D_k par les lignes de niveau 0 (nodales) de f_k .



Partitions spectrales minimales

Conjecture : l'hexagone serait asymptotiquement optimal ?



Inégalités fonctionnelles

Par intégration par partie (formule de Green),

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} f(x) \Delta f(x) dx &= - \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \\ \sum \int_{\Omega} (-\lambda_k) |f_k(x)|^2 dx &= \\ -\lambda_1 \sum \int_{\Omega} |f_k(x)|^2 dx &\geq\end{aligned}$$

si $f_0 = 0$ (la partie constante de f , c-à-d $\int_{\Omega} f$).

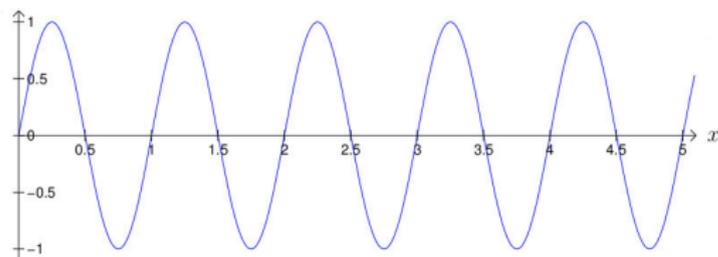
Inégalité de Poincaré

$$\int_{\Omega} \left(f(x) - \int_{\Omega} f(z) dz \right)^2 dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx$$

- 1 Le laplacien
- 2 L'onde et la chaleur
- 3 Miscellanées
- 4 Les notes de musique**

La corde vibrante

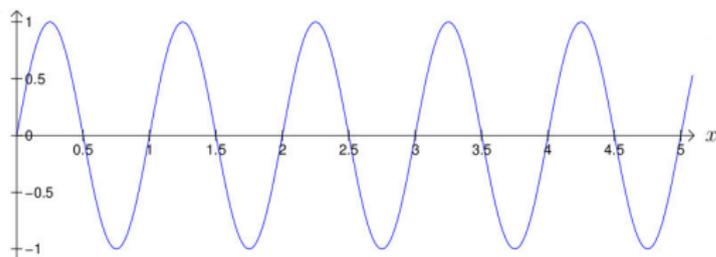
Sur \mathbb{R} , $f'' = -\nu^2 f \Rightarrow f(t) = A \cos(\nu t + \varphi)$.



Spectre : $\nu_k = k \frac{\pi}{L}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

La corde vibrante

Sur \mathbb{R} , $f'' = -\nu^2 f \Rightarrow f(t) = A \cos(\nu t + \varphi)$.

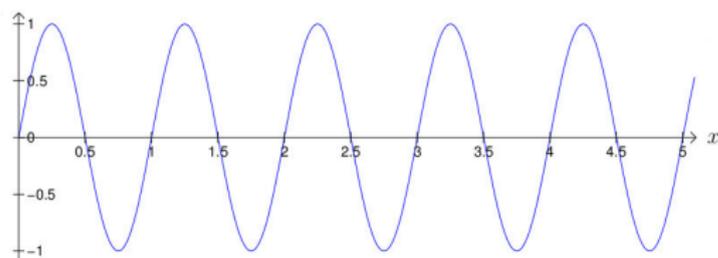


Spectre : $\nu_k = k \frac{\pi}{L}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- ν_1 : fondamentale (son le mieux entendu).
- $\nu_2 = 2\nu_1$: octave (note identifiée par le cerveau à la fondamentale).
- $\nu_3 = 3\nu_1 = \frac{3}{2}\nu_2$: quinte.

La corde vibrante

Sur \mathbb{R} , $f'' = -\nu^2 f \Rightarrow f(t) = A \cos(\nu t + \varphi)$.

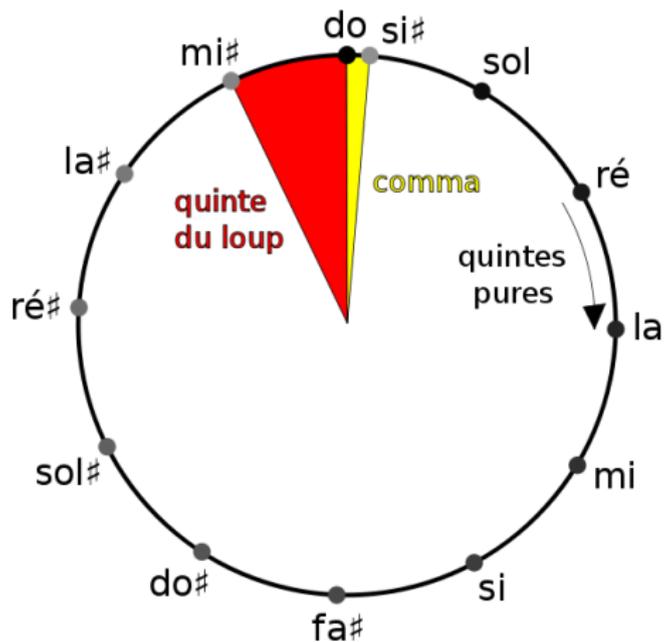


Spectre : $\nu_k = k \frac{\pi}{L}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

- ν_1 : fondamentale (son le mieux entendu).
- $\nu_2 = 2\nu_1$: octave (note identifiée par le cerveau à la fondamentale).
- $\nu_3 = 3\nu_1 = \frac{3}{2}\nu_2$: quinte.

$$\frac{3^{12}}{2^{19}} \simeq 1,0137$$

La gamme pythagoricienne



De nombreux inconvénients

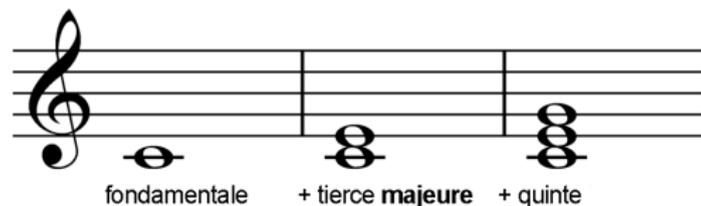
- 1 La quinte du loup.
- 2 La difficulté à moduler ou transposer.
- 3 Des tierces (= 4 quintes) fausses (comma syntonique) :

$$\frac{3^4}{2^5} = \frac{81}{64}$$
$$\frac{5}{4} = \frac{80}{64}.$$

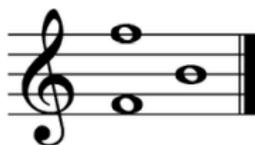
⇒ Tempéraments.

Des fractions plus jolies que d'autres

- accord majeur = premières harmoniques



- tons voisins, cadences, etc.
- Triton (diabolus in musica) : $\sqrt{2}$.



C'est malgré tout très culturel...

Références

Crédits image : (pas tout à fait exhaustif)

- [La page d'Édouard Oudet](#) (une caverne d'Ali Baba)
- [Wikipedia...](#) (pages : minimal surfaces, hearing the shape of a drum)
- [Analyse et comparaison des sons](#)

Articles d'Images des Maths :

- [À la découverte des partitions spectrales minimales](#)
- [Le laplacien](#) (tout simplement)
- [La tâche](#) (pour le mouvement par courbure)
- [Les figures de Chladni](#)
- [Spectre](#)

Références

Acoustique :

- Comparaison du spectre d'un violon authentique et d'une banque de son
- Les premiers modes pour un tambour rond.

Géométrie spectrale :

- Surveys in Differential Geometry, *Eigenvalues of Laplacians and other geometric operators*
- Un traitement mathématique accessible des tambours

Mathématique et composition :

- *The lamb* (Tavener, 1982)
- *L'offrande musicale* (Bach ; palindrome, ou ruban de Möebius musical)
- *La quinte juste* (Kaamelott, Astier)
- Society for Mathematics and Computation in Music