Initiation à la théorie des jeux

Hugo Martin

Mai-juin 2013

1. Jeux à somme nulle
   - Stratégies pures
   - Stratégies mixtes pour des jeux finis
   - Théorème du minmax de von Neumann
2. Introduction aux jeux répétés
   - Information complète et observation parfaite

Objectif : analyser les situations d'interaction stratégique où plusieurs agents tentent de maximiser leur *utilité* (ex : gains, argent, espérance de vie...).
Cadre : jeux à deux joueurs

Modèle

$G = (I, J, g)$

- les ensembles de stratégies pures de chacun des joueurs : I pour le joueur 1 et J pour le joueur 2 ;
- une fonction de gain $g : \mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{R}^2$ (qu'on supposera bornée).

Le paiement de J1 est alors $g(i, j)$ et celui de J2 est $-g(i, j)$.

Exemple : jeu fini

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple : jeu infini

Soient $T = S = [0, 1]$. On considère le jeu $G = (\mathrm{S}, \mathrm{T}, f)$, où :

$$f(s,t) = \begin{cases} 0 & si \quad s = t \\ -\frac{1}{s^2} & si \quad s > t \\ \frac{1}{t^2} & si \quad s < t \end{cases}$$

Valeur inférieure

Définition

La valeur inférieure d'un jeu est définie par $\underline{v} = \sup_{i \in \mathrm{I}} \inf_{j \in \mathrm{J}} g(i,j) \in \mathbb{R}$.

$\underline{v}$ s'interprète comme la borne inférieure des paiements, c'est à dire le miminum qu'un joueur 1 prudent peut s'assurer de gagner.

Jeux à somme nulle

Valeur

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\inf\{1, 2, -3\} = -3 \qquad \inf\{-1, -7, 1\} = -7$$

$$\underline{v} = \sup\{-3, -7\} = -3$$

Valeur supérieure

Symétriquement, on a :

Définition

La valeur supérieure d'un jeu est définie par $\overline{v} = \inf_{j \in \mathrm{J}} \sup_{i \in \mathrm{I}} g(i,j) \in \mathbb{R}$.

$\overline{v}$ s'interprète comme la borne supérieure des paiements, c'est à dire le maximum qu'un joueur 2 prudent peut s'assurer de payer.

Valeur supérieure

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\sup\{1,-1\} = 1 \qquad \sup\{2,-7\} = 2 \sup\{-3,1\} = 1$$

$$\overline{v} = \inf\{1,2,1\} = 1$$

Valeurs

Lemme

$$\underline{v} \leqslant \overline{v}$$

Interprétation : le gain minimum d'un J1 prudent est au plus égal au paiement d'un J2 prudent.

Définition

Si dans un jeu à somme nulle $\mathrm{G} = (\mathrm{I}, \mathrm{J}, g)$ on a $\underline{v} = \overline{v}$, on dit que G a une valeur. On la note v.

La valeur correspond à l'équilibre du jeu.

Stratégie optimale

Soit G un jeu qui a une valeur v. Soit $\epsilon > 0$.

Définition

Une stratégie i du joueur 1 est ϵ-optimale si $\forall j \in J, g(i,j) \geqslant v - \epsilon$.

Symétriquement :

Définition

Une stratégie j du joueur 2 est ϵ-optimale si $\forall i \in I, g(i,j) \leqslant v + \epsilon$.

LE jeu précédent n'a pas de stratégie pure optimale.

Points selles et stratégies optimales

Définition

Un couple de stratégies $(i^*, j^*) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ est une *point selle* si

$$\forall i \in \mathrm{I}, \forall j \in \mathrm{J}, g(i, j^*) \leqslant g(i^*, j^*) \leqslant g(i^*, j).$$

Interprétation : aucun des deux joueurs n'a de déviation profitable.
(c'est une considération géométrique...)

Points selles et stratégies optimales

Proposition

S'il existe un point selle (i^*, j^*), alors le jeu a une valeur, i^* et j^* sont des stratégies optimales et $v = g(i^*, j^*)$.

Proposition

Si un jeu a une valeur v, et si i^* et j^* sont des stratégies optimales, alors (i^*, j^*) est un point selle et $v = g(i^*, j^*)$.

Le jeu

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} G & M & D \end{array} \\ \begin{array}{c} H \\ B \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

n'a pas de stratégie optimale.

$$\underline{v} = -3$$

$$\overline{v} = 1$$

Modèle

Définition

Soit $\mathrm{I} = \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble des stratégies pures du joueur 1. On définit $\Delta(\mathrm{I})$ l'ensemble des stratégies mixtes du joueur 1 comme l'ensemble des probabilités sur I.

$$\Delta(\mathrm{I}) = \{x = (x_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

Modèle

On définit alors l'extension mixte de G :

Définition

L'enxtension mixte d'un jeu fini $\mathrm{G} = (\mathrm{I}, \mathrm{J}, g)$ se note $\widetilde{\mathrm{G}} = (\Delta(\mathrm{I}), \Delta(\mathrm{J}), \widetilde{g})$. Cela signifie :

$$\forall (x, y) \in \Delta(\mathrm{I}) \times \Delta(\mathrm{J}), \widetilde{g}(x, y) = \mathbb{E}_{x \otimes y}(g) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j g(i, j)$$

Les définitions précédentes s'étendent aux stratégies mixtes.
Les ensembles $\Delta(\mathrm{I})$ et $\Delta(\mathrm{J})$ sont des compacts, on pourra parler de min et max. Les valeurs inférieures et supérieures en stratégies mixtes sont :

Définition

$$\underline{V} = \max_{x \in \Delta(\mathrm{I})} \min_{y \in \Delta(\mathrm{J})} g(x,y), \quad \overline{V} = \min_{y \in \Delta(\mathrm{J})} \max_{x \in \Delta(\mathrm{I})} g(x,y)$$

Valeur en stratégie pure $\Rightarrow$ valeur en stratégie mixte ?

Puisque $\mathrm{I} \subset \Delta(\mathrm{I})$ et $\mathrm{J} \subset \Delta(\mathrm{J})$, on a :

Lemme

$\underline{v} \leqslant \underline{V} \leqslant \overline{V} \leqslant \overline{v}$

Corolaire

Si un jeu a un valeur en stratégie pure, il a une valeur en stratégie mixte.

Théorème du minmax de von Neumann

Tout jeu à somme nulle fini a une valeur en stratégie mixte.

La preuve se fait par l'absurde en supposant l'inégalité stricte $\underline{V} < \overline{V}$. Il faut alors formuler le problème pour pouvoir appliquer le théorème de Hahn-Banach pour séparer $w = (r, \cdots, r)$ et un convexe fermé bien choisi.

(c'est une autre considération géométrique...)

Version fonctionnelle

$$\min_{y \in \Delta(\mathrm{J})} \max_{x \in \Delta(\mathrm{I})} g(x,y) = \max_{x \in \Delta(\mathrm{I})} \min_{y \in \Delta(\mathrm{J})} g(x,y)$$

Version matricielle

Si le jeu G est représenté par la matrice A, alors :

$$\min_{y \in \Delta(\mathrm{J})} \max_{x \in \Delta(\mathrm{I})} x\mathrm{A}y = \max_{x \in \Delta(\mathrm{I})} \min_{y \in \Delta(\mathrm{J})} x\mathrm{A}y$$

Soit G un jeu matriciel de valeur V.

Proposition

Si (x, y) est un couple optimal et que i et i' sont des stratégies pures du joueur 1, jouées avec probabilité > 0 dans x, on doit avoir $g(i, y) = g(i', y) = V$.

Méthode pour déterminer la stratégie mixte lorsque l'un des joueurs n'a que deux stratégies

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

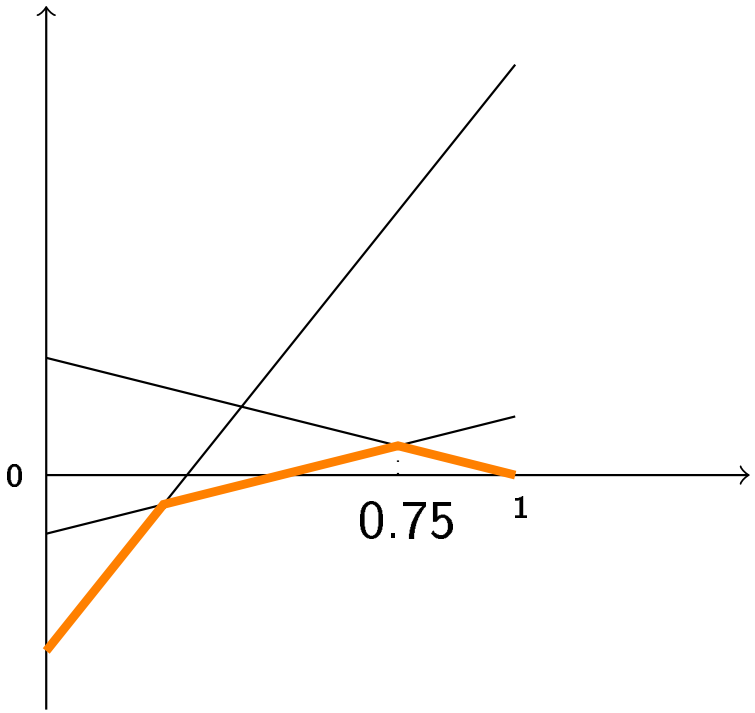
Soit x^* une stratégie optimale mixte du joueur 1. Alors $x^* = \begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}$ avec $p \in [0,1]$.

Alors $x\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2p-1 & 10p-3 & 2-2p \end{pmatrix}$.

Méthode pour déterminer la stratégie mixte lorsque l'un des joueurs n'a que deux stratégies

On représente ces fonctions de p sur $[0,1]$. On représente $p \mapsto \min_{y \in \Delta(\mathrm{J})} g\left(\begin{pmatrix} p & 1-p \end{pmatrix}, y\right)$ (en orange). On détermine le max de cette fonction.

$x^* = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$



Jeux à somme nulle

Méthode pour déterminer la stratégie mixte lorsque l'un des joueurs n'a que deux stratégies

Soit $y^* = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1-a-b \end{pmatrix}$ une stratégie optimale mixte du joueur 2.

Pour déterminer a et b, on utilise une propriété énoncée plus haut :

Puisque $x_1^* > 0$ et $x_2^* > 0$, on doit avoir $\mathrm{A}y^* = \begin{pmatrix} v \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Jeux à somme nulle

Méthode pour déterminer la stratégie mixte lorsque l'un des joueurs n'a que deux stratégies

On obtient alors :

$$\begin{cases} a + 7b &= 1/2 \\ 3a + 5b &= 3/2 \end{cases}$$

Et en résolvant : $y^* = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$

Stratégies dominées

Définition

$i' \in \mathrm{I}$ est strictement (ou fortement) dominée par $i \in \mathrm{I}$ si pour toute stratégie $j \in \mathrm{J}$ du second joueur, $g(i', j) < g(i, j)$.
$i' \in \mathrm{I}$ est faiblement dominée par $i \in \mathrm{I}$ si pour toute stratégie $j \in \mathrm{J}$ du second joueur, $g(i', j) \leqslant g(i, j)$ et s'il existe une stratégie $j \in \mathrm{J}$ telle que $g(i', j) < g(i, j)$.

Dilemme du prisonnier répété

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} D & N \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ N \end{array} & \begin{pmatrix} (4,4) & (12,1) \\ (1,12) & (8,8) \end{pmatrix} \end{array}$$

Par élimination des stratégies strictement dominées, le profil de stratégies "rationnelles" est (D, D).