Dimension cohomologique et dimension géométrique

Cyril Lacoste

8 octobre 2015

Si Γ est un groupe discret infini, on aimerait définir une notion de dimension pour Γ, en regardant de "bons espaces" sur lesquels faire agir Γ (appelés espaces classifiants). Nous allons ainsi définir deux dimensions : la dimension géométrique et la dimension cohomologique, qui se trouvent être égales, sauf éventuellement dans un cas où c'est encore une conjecture.

Le problème est qu'elles sont infinies dès lors que Γ possède des éléments de torsion... Pour remédier à cela, nous allons définir deux autres dimensions : la dimension cohomologique virtuelle et la dimension géométrique propre. Cette fois nous connaissons des cas où elles ne sont pas égales. Cependant il a été récemment démontré qu'elles sont égales si Γ est un réseau dans un groupe de Lie simple classique. La preuve de ce résultat sa ramène dans la plupart des cas à de bêtes calculs d'algèbre linéaire niveau prépa.

Nous verrons aussi qu'il est très facile de calculer la dimension cohomologique virtuelle à l'aide du théorème de Borel-Serre, en ne considérant que des notions élémentaires sur les groupes algébriques et arithmétiques. Aucune connaissance sur les groupes de cohomologie ou la géométrie algébrique n'est requise.