Construction algébrique d'un corps réel

Emil Artin et Otto Schreier, à Hambourg

Avec sa "Théorie algébrique des corps" [1], E. Steinitz a ouvert par des raisonnements purement abstraits de vastes secteurs de l'algèbre ; l'algèbre moderne doit donc d'importantes découvertes à ses recherches innovantes. Pourtant, de nombreux domaines se sont jusque-là soustraits aux méthodes abstraites, comme par exemple l'algèbre réelle et certaines parties de la théorie des nombres algébriques. On peut mentionner par exemple le théorème de Sturm sur le nombre de racines réelles d'une équation, les théories des unités des corps de nombres, les corps de classes et la loi de réciprocité.

Pour traiter l'algèbre réelle il est nécessaire de se demander d'abord par quelles propriétés les corps réels, en particulier les corps de nombres réels ou des nombres algébriques réels, se distinguent-ils des autres corps. On essaiera de décrire ces propriétés par des axiomes simples. Un tel système d'axiomes devra satisfaire différentes conditions. Il doit d'abord rester cohérent avec le sens habituel du concept "réel". Un corps absolument algébrique, par exemple, ne pourra donc être appelé réel que s'il est isomorphe à un corps de nombres algébriques réels au sens habituel. Ensuite le système d'axiomes doit permettre de prouver de manière purement algébrique l'existence d'une classe de corps réels, éventuellement élargie, qui doit, bien sûr, couvrir comme cas particuliers les corps de nombres algébriques réels. On doit ensuite démontrer que les théorèmes de l'algèbre réelle s'appliquent aux corps réels, au sens abstrait.

Une telle caractérisation des corps réels est en effet possible. Il serait aisé de commencer par considérer des corps ordonnés. Mais du point de vue de l'algèbre abstraite, qui s'applique pourtant aux corps usuels, pour la plupart ordonnés, on préfèrera toutefois une définition qui utilise seulement les opérations usuelles d'addition et de multiplication et qui entraine la possibilité d'ordonner les corps. On doit aussi attendre d'une telle dfinition qu'elle conduise facilement à une preuve algébrique d'existence pour les corps réels.

La propriété fondamentale des corps réels cherchée est la suivante : **la nullité d'une somme de carrés devra toujours entraîner celle de chaque carré**. Ou, ce qui revient au même : -1 **n'est pas représentable par une somme de carrés**. Cette condition s'est imposée au cours de la recherche de l'un d'entre nous[2] des caractéristiques algébriques des corps de nombres algébriques réels.

[1] Crelle T. 137 (1910), p. 167-309.

[2] E. Artin, Kennzeichnung des Körpers der reellen algebraischen Zalhen., Hamb. Abh.

Ce qui suit doit montrer que l'on peut aussi construire l'algèbre réelle de manière parfaitement abstraite.

Le travail qui fait suite à celui-ci[3] fera apparaître l'intérêt de ces constructions : il est possible grâce à elles de résoudre le problème de la représentabilité d'un élément d'un corps en somme de carrés, et ainsi le problème de HILBERT sur les fonctions définies trouve sa solution.

1 Définition et caractéristiques principales des corps réels

Un corps est dit "réel" si dans celui-ci -1 *n'est pas représentable par une somme de carrés.*

Un corps réel est toujours de caractéristique nulle puisque dans un corps de caractéristique p, -1 est la somme de $(p-1)$ termes 1^2.

Un corps K *est dit "ordonné" si la propriété "être positif"(*> 0*), pour les éléments de ce corps, est définie par les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout élément* a *de* K*, on a exactement l'une des relations suivantes:*

$$a = 0, \quad a > 0, \quad -a > 0.$$

2. *Si* $a > 0$ *et* $b > 0$*, alors* $a + b > 0$ *et* $ab > 0$

Si $-a > 0$, nous dirons que a est *négatif.*

Nous définissons, dans un corps ordonné, une *relation d'ordre* générale par la condtion :

$$a > b (\text{ou } b < a) \text{ quand } a - b > 0,$$

et l'on prouve facilement que les axiomes d'un ordre sont satisfaits.

Si nous définissons en outre la quantité $|a|$ comme l'élément non négatif parmi les éléments $a, -a$, on a immédiatement les règles suivantes :

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|; |a + b| \leq |a| + |b|$$

De même on vérifie facilement que : $|a|^2 = a^2$. Ainsi un carré est toujours non négatif. En particulier $1 = 1^2 > 0$, et par conséquent -1 n'est pas représentable dans K par une somme de carrés, *i.e.* tout corps ordonné est réel.

Un corps $\mathbf{P}$ *est réel clos*[4] *s'il est réel et s'il n'admet pas d'extension algébrique réelle.*

Théorème 1 *Tout corps réel clos peut être ordonné d'une et d'une seule manière.*

Bd.3 (1924), p. 319-323.

[3] E. ARTIN, Über die Zerlegung definiter Funktionen in Quadrate.

[4] On différencie ici les notions de clotures réelle et algébrique

Soit $\mathbf{P}$ un corps réel clos. Nous voulons démontrer que :

Tout élément a non nul de $\mathbf{P}$ est soit lui-même un carré soit $-a$ est un carré, ces deux cas s'excluant. Une somme de carrés d'éléments de $\mathbf{P}$ est elle-même un carré.

Le théorème 1 est une conséquence de ce qui précède : car en supposant que $a > 0$ quand a est un carré et est non nul, nous définissons clairement un ordre sur $\mathbf{P}$ et cet ordre est le seul possible puisqu'une somme de carrés est nécessairement positive.

Soit γ élément de $\mathbf{P}$ non carré alors $\mathbf{P}(\sqrt{\gamma})$ est une extension algébrique de $\mathbf{P}$ qui n'est donc pas réelle. Par conséquent, nous avons l'équation :

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_\nu \sqrt{\gamma} + \beta_\nu)^2$$

ou encore

$$-1 = \gamma \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2 + 2\sqrt{\gamma} \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \beta_\nu$$

où α_ν, β_ν appartiennent à $\mathbf{P}$. Le dernier terme doit être nul, sinon $\sqrt{\gamma}$ appartiendrait à $\mathbf{P}$ contrairement à l'hypothèse. Inversement, le premier membre ne peut pas s'annuler sinon $\mathbf{P}$ ne serait pas réel. De là nous concluons en premier lieu que γ n'est pas non plus une somme de carrés de $\mathbf{P}$, sinon -1 serait une somme de carrés de $\mathbf{P}$. Finalement, si γ n'est pas un carré de $\mathbf{P}$, alors il n'est pas non plus une somme de carrés de $\mathbf{P}$.

A présent nous obtenons:

$$-\gamma = \frac{1 + \sum_{\nu=1}^{n} \beta_\nu^2}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_\nu^2}$$

Le numérateur et le dénominateur de cette expression sont des sommes de carrés, donc des carrés et ainsi: $-\gamma = c^2$ où c est dans $\mathbf{P}$. Dès lors tout élément de $\mathbf{P}$ vérifie au moins une des équations $\gamma = b^2$, $-\gamma = c^2$ mais si $\gamma \neq 0$, les deux ne peuvent pas être vérifiées car on aurait alors $-1 = (\frac{b}{c})^2$, ce qui n'est pas le cas.

En raison du théorème 1, nous supposerons dans la suite tous les corps réels clos ordonnés.

Théorème 2 *Dans un corps réel clos, tout polynôme de degré impair a au moins une racine.*

Le théorème est trivial pour le degré 1. Supposons qu'il soit démontré pour tous les degrés impairs $< n$; soit $f(x)$ un polynôme de degré n impair (> 1). Si $f(x)$ est réductible dans le corps réel clos $\mathbf{P}$ alors $f(x)$ possède un facteur irréductible de degré impair $< n$, et donc aussi une racine dans $\mathbf{P}$. L'hypothèse selon laquelle $f(x)$ serait irréductible conduit a une absurdité. Soit α une racine symbolique de $f(x)$. $\mathbf{P}(\alpha)$ n'étant donc pas réel, nous aurions l'équation :

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(\alpha))^2, \tag{1}$$

où les $\varphi_\nu(x)$ sont des polynômes de degré au plus $(n-1)$ à coefficients dans $\mathbf{P}$. De (1) nous tirons l'identité :

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(x))^2 + f(x)g(x) \tag{2}$$

La somme des φ_ν^2 est de degré pair, car les coefficients de plus haut degré sont des carrés et leur somme ne peut s'annuler. De plus le degré est positif, car sinon (1) donnerait déjà une contradiction. Donc $g(x)$ est de degré impair $\leq n-2$, et $g(x)$ a donc dans tous les cas une racine a dans $\mathbf{P}$. En substituant a dans (2) on a :

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{r} (\varphi_\nu(a))^2,$$

ce qui conduit à une contradiction puisque $\varphi_\nu(a)$ est dans $\mathbf{P}$.

Théorème 3 *Un corps réel clos n'est pas algébriquement clos. Par contre, l'adjonction de i engendre un corps algébriquement clos*[5].

La première assertion est triviale car l'équation $x^2+1=0$ n'a pas de racine dans un corps réel.

La deuxième partie de l'énoncé est une conséquence directe de :

Théorème 3a. *Supposons que tous les éléments positifs d'un corps ordonné* $\mathbf{K}$ *aient une racine carrée et que tout polynôme de degré impair ait au moins une racine, alors l'adjonction de i engendrera un corps algébriquement clos.*

Remarquons tout d'abord que tout élément possède une racine carrée dans $\mathbf{K}(i)$ et donc toute équation quadratique admet une solution. Soit $a+bi$ un élément $\mathbf{K}(i)$ (a et b dans $\mathbf{K}$). $\sqrt{a^2+b^2}$ est alors également dans $\mathbf{K}$, et de plus on a $|\sqrt{a^2+b^2}| \geq |a|$. Alors

$$c_1 = |\sqrt{\tfrac{a+|\sqrt{a^2+b^2}|}{2}}| \text{ et } c_2 = |\sqrt{\tfrac{-a+|\sqrt{a^2+b^2}|}{2}}|$$

sont des éléments de $\mathbf{K}$ et on a $(c_1 + ic_2 \mathrm{sign} b)^2 = a+bi$.

Pour montrer maintenant que ceci implique que tout polynôme irréductible dans $\mathbf{K}$ possède une racine dans $\mathbf{K}(\mathbf{i})$, nous pouvons procéder suivant Gauss. On peut démontrer que tout polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$ qui n'a pas de racine double et dont le degré est divisible par 2^{m-1} mais pas par 2^m a une racine dans $\mathbf{K}(\mathbf{i})$. (Pour $m=1$, cela est une conséquence des hypothèses). Soit $f(x)$ un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$ de degré n sans racine double, avec $n = 2^m q$, q impair. Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ les racines de $f(x)$ dans une extension de $\mathbf{K}$. Il existe alors un c dans $\mathbf{K}$ tel que les $\frac{n(n-1)}{2}$ expressions $\alpha_j\alpha_k + c(\alpha_j+\alpha_k)$ pour $1 \leq j < k \leq n$ aient des valeurs distinctes[6]. Comme ces expressions satisfont

[5] i est ici et dans la suite une racine du poynôme x^2+1

[6] Cela est possible car $f(x)$ n'a pas des racines doubles.

visiblement une équation de degré $\frac{n(n-1)}{2}$ dans $\mathbf{K}$, alors l'une d'elles au moins est dans $\mathbf{K}$, que ce soit par exemple $\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2)$. D'après la condition sur c, on a $\mathbf{K}(\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = \mathbf{K}(\alpha_1\alpha_2 + c(\alpha_1 + \alpha_2))$; ainsi, α_1 et α_2 sont les solutions d'une équation de degré 2 dans $\mathbf{K}(i)$.

La démonstration peut également être donnée à partir de la Théorie de Galois : comme tout polynôme de $\mathbf{K}$ de degré impair (> 1) est réductible, $\mathbf{K}$ n'admet que des extensions algèbriques de degré pair. Soit G une extension galoisienne du corps $\mathbf{K}$ de degré $n = 2^m q$ (q impair) et $\mathfrak{G}$ le groupe de Galois de G relativement à K. Soit $\mathfrak{B}$ un sous-groupe de $\mathfrak{G}$ d'ordre 2^m (il existe d'après le théorème de Sylow) et H le corps associé à $\mathfrak{B}$; H est de degré q relativement à K, et on doit donc avoir $q = 1$ et H coïncide avec K. Autrement dit, G est de degré 2^m relativement à K et peut donc être engendré à partir de K par adjonctions successives de racines quadratiques. D'après ce qui précède G est dans $K(i)$. C.q.f.d.

Théorème 4 *Soit $\mathbf{\Omega}$ un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Soit $\mathbf{P}$ un sous-corps de $\mathbf{\Omega}$à partir duquel Ω est engendré par une extension élémentaire. Alors $\mathbf{P}$ est réel clos.*

Soit $\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}(\xi)$. Alors ξ ne peut être transcendant par rapport à $\mathbf{P}$, sinon $x^2 - \xi = 0$ serait sans solution dans $\mathbf{\Omega}$et alors $\mathbf{\Omega}$ ne serait pas algébriquement clos. En conséquence, $\mathbf{\Omega}$ est une extension finie de $\mathbf{P}$. La suite de la démonstration est comme dans *loc. cit* 2) .

Les corps réels clos coïncident par conséquent avec les corps de caractéristique nulle[7], qui peuvent par une extension élémentaire devenir algébriquement clos.

Théorème 5 *Soit $f(x)$ un polynôme à coefficients dans le corps réel clos $\mathbf{P}$, et a, b des éléments de $\mathbf{P}$ tels que $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Il existe alors au moins un élément c de $\mathbf{P}$ entre a et b pour lequel $f(c) = 0$.*

Comme $\mathbf{P}(\mathbf{i})$ est algébriquement clos, $f(x)$ se décompose dans $\mathbf{P}$ en facteurs linéaires et quadratiques irréductibles. Or un polynôme quadratique irréductible $x^2 + px + q$ ne prend que des valeurs positives car il peut être écrit sous la forme : $(x + \frac{p}{2})^2 + (q - \frac{p^2}{4})$; le premier terme de cette expression est toujours ≥ 0, et il en est de même pour le deuxième en raison de l'hypothèse d'irréductibilité. Dès lors, un changement de signe de $f(x)$ ne peut provenir que d'un changement de signe d'un facteur linéaire, ce qui ne peut provenir que d'une racine dans l'intervalle $a < x < b$.

Théorème 6 *Les théorèmes de l'algèbre réelle sont aussi vrais pour un corps réel clos. Par exemple : Les polynômes sont uniformément continus sur tous les intervalles $a \leq x \leq b$. Le théorème de Rolle. Le théorème de la moyenne en calcul différentiel. Le théorème de Sturm sur le nombre de racines d'un polynôme sur un intervalle.*

[7]Cette condition est superflue ; nous y reviendrons.

Toute fonction rationnelle ne s'annulant pas pour $a \leq x \leq b$ admet sur cet intervalle un minimum et un maximum, et ces valeurs extrêmes sont atteintes pour $x = a, b, \xi_j$ où les ξ_j sont les racines de la dérivée de notre fonction appartenant à l'intervalle considéré.

Enfin les racines du polynôme $x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ sont toutes inférieures à $1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

Les preuves découlent comme d'ordinaire du théorème 5. On peut comparer, par exemple, avec les sections correspondantes du livre de H. WEBER [èbre I] (en particulier 35, 91, 112, 114 du tome 2).

2 Théorèmes d'existence et d'unicité

Nous allons démontrer maintenant l'existence de certaines extensions réelles closes pour un corps réel et l'existence d'un sous-corps réel clos dans un corps algébriquement clos.

Théorème 7 *Soit $\mathbf{K}$ un corps réel et $\mathbf{\Omega}$un corps algébriquement clos contenant $\mathbf{K}$. Alors il existe (au moins) un corps réel clos $\mathbf{P}$ entre $\mathbf{K}$ et $\mathbf{\Omega}$, tel que $\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}(\mathbf{i})$.*

Pour fixer les idées, imaginons les éléments de $\mathbf{\Omega}$ bien ordonnés : $1 = a_0, a_1, a_2, \cdots, a_\omega, \cdots$, et définissons pour chaque ordinal ν de ce bon ordre les corps $\mathbf{K}_\nu$ et $\mathbf{K}^*_\nu$ de la manière suivante : $\mathbf{K_0} = \mathbf{K}^*_0 = \mathbf{K}$. Si $\mathbf{K}_\mu$ et $\mathbf{K}^*_\mu$ sont définis pour $\mu < \nu$, alors $\mathbf{K}^*_\nu$ est l'union des $\mathbf{K}_\mu$ $(\mu < \nu)$ et :

$\mathbf{K}_\nu = \mathbf{K}^*_\nu(a_\nu)$ si ce corps est réel,

$\mathbf{K}_\nu = \mathbf{K}^*_\nu$ sinon.

Il résulte immédiatement de STEINITZ [**?**], 2, Théorème 2, que $\mathbf{K}^*_\nu$ est un corps et il en résulte également que tous les corps $\mathbf{K}_\nu$ sont réels ; ainsi, notre union $\mathbf{P}$ est un corps réel. Nous disons que $\mathbf{P}$ satisfait les conditions du théorème. Car si $a = a_\nu$ est un élément de Ω, qui n'appartient pas à $\mathbf{P}$, alors a n'appartient pas non plus à $\mathbf{K}_\nu$, i.e. $\mathbf{K}^*_\nu(a_\nu)$ n'est pas réel, et $\mathbf{P}(\mathbf{a})$ n'est à fortiori pas non plus réel. $\mathbf{P}$ est donc réel clos. Mais comme une extension transcendante simple d'un corps réel est nécessairement réelle, il en résulte que $\mathbf{\Omega}$est algébrique par rapport à $\mathbf{P}$. D'après le théorème 3, $\mathbf{P}(i)$ est algébriquement clos, et compte tenu de l'unicité des extensions algébriques de P algébriquement closes, les corps $\mathbf{\Omega}$ et $\mathbf{P}(i)$ coïncident.

Quelques conséquences immédiates du théorème 7 doivent tout particulièrement être énoncées :

Théorème 7a. *Tout corps réel $\mathbf{K}$ admet (au moins) une extension algébrique réellement close.*

Pour la démonstration il suffit de prendre pour le Ω du théorème 7 l'extension algébrique algébriquement close de $\mathbf{K}$.

Théorème 7b. *Tout corps réel peut être ordonné d'une manière (au moins).*

Cela résulte directement des théorèmes 1 et 7a.

Théorème 7c. *Tout corps algébriquement clos de caractéristique nulle* $\mathbf{\Omega}$ *contient (au moins) un sous-corps réel clos* $\mathbf{P}$ *tel que :* $\mathbf{\Omega} = \mathbf{P}(i)$.

Pour un corps ordonné, le théorème 7a se précise de la manière suivante :

Théorème 8 *Etant donné un corps ordonné* $\mathbf{K}$*, il existe une et une seule (aux extensions équivalentes près) extension algébrique réellement close* $\mathbf{P}$ *de* $\mathbf{K}$ *dont l'ordre étend l'ordre de* $\mathbf{K}$*.* $\mathbf{P}$ *n'admet pas d'autre automorphisme que celui qui laisse fixe les éléments de* K*.*

Commençons par démontrer le :

Lemme 1 *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps ordonné,* $\bar{\mathbf{K}}$ *le corps obtenu en ajoutant à* $\mathbf{K}$ *les racines carrées de tous les éléments positifs de* $\mathbf{K}$*. Alors* $\bar{\mathbf{K}}$ *est réel.*

Il suffit manifestement de montrer qu'il n'y aucune égalité de la forme suivante :

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \xi_\nu^2 \tag{3}$$

où les c_ν sont des éléments positifs de $\mathbf{K}$, les ξ_ν des éléments de $\bar{\mathbf{K}}$. Supposons qu'il y ait une telle égalité. Parmi les ξ_ν, il ne peut y avoir qu'un nombre fini de racines d'éléments positifs de $\mathbf{K}$, que ce soit par exemple $\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \cdots, \sqrt{a_r}$. Nous choisissons parmi les équations du type (3) l'une de celles pour lesquelles r est le plus petit possible. (On a $r \geq 1$, car il n'y a pas d'égalité du type (3) dans $\mathbf{K}$.) Les ξ_ν peuvent se mettre sous la forme : $\xi_\nu = \eta_\nu + \zeta_\nu \sqrt{a_r}$, où η_ν, ζ_ν sont dans $\mathbf{K}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_{r-1}})$. On obtient alors :

$$-1 = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \eta_\nu^2 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu a_r \zeta_\nu^2 + 2\sqrt{a_r} \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \eta_\nu \zeta_\nu. \tag{4}$$

Si la dernière somme de (4) s'annulait, (4) serait une équation de la forme (3) contenant moins de r racines carrées. Elle n'est donc pas nulle et ainsi $\sqrt{a_r}$ est dans $\mathbf{K}(\sqrt{a_1}, \cdots, \sqrt{a_{r-1}})$ et (3) peut être écrite avec moins de r racines carrées. Notre hypothèse conduit donc à une contradiction

Après ces préliminaires, nous pouvons maintenant démontrer le théorème 8. Soit $\mathbf{P}$ une extension algébrique réellement close de $\bar{\mathbf{K}}$. Un tel corps existe d'après le théorème 7a, et nous savons que $\bar{\mathbf{K}}$ est réel. $\mathbf{P}$ est aussi algébrique par rapport à $\mathbf{K}$ et l'ordre de $\mathbf{P}$ prolonge celui de $\mathbf{K}$; comme tout élément positif de $\mathbf{K}$ est un carré de $\bar{\mathbf{K}}$, cela est encore vrai dans $\mathbf{P}$.

Soit maintenant $\mathbf{P}^*$ une deuxième extension algébrique réellement close de $\mathbf{K}$ qui conserve l'ordre de $\mathbf{K}$. Soit $f(x)$ un polynôme non nécessairement irréductible à coefficients dans $\mathbf{K}$. Le thorme de Sturm nous permet de décider déjà dans $\mathbf{K}$ combien de racines $f(x)$ possède dans $\mathbf{P}$. Nous avons juste besoin

d'examiner une suite de STURM pour $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ aux points $\pm(1 + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|)$ (théorème 6). Par conséquent, $f(x)$ a autant de racines dans $\mathbf{P}$ que dans $\mathbf{P}^*$. En particulier, toute équation dans $\mathbf{K}$ ayant au moins une racine dans $\mathbf{P}$ en a aussi au moins une dans $\mathbf{P}^*$, et réciproquement. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ les racines de $f(x)$ dans $\mathbf{P}$ et $\beta_1^*, \beta_2^*, \cdots, \beta_r^*$ les racines de $f(x)$ dans $\mathbf{P}^*$. Choisissons ξ dans $\mathbf{P}$ tel que $\mathbf{K}(\xi) = \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ et $F(x) = 0$ l'équation irréductible de ξ dans $\mathbf{K}$. $F(x) = 0$ admet aussi ξ comme racine dans $\mathbf{P}$, elle admet donc aussi une racine η^* dans $\mathbf{P}^*$; $\mathbf{K}(\xi)$ et $\mathbf{K}(\eta^*)$ sont des extensions équivalentes de $\mathbf{K}$. Comme $\mathbf{K}(\xi)$ a été engendré par les r racines de $f(x)$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$, $\mathbf{K}(\eta^*)$ doit être aussi engendré par les r racines de $f(x)$. Mais $\mathbf{K}(\eta^*)$ est un sous-corps de $\mathbf{P}^*$, on a donc : $\mathbf{K}(\eta^*) = \mathbf{K}(\beta_1^*, \beta_2^*, \cdots, \beta_r^*)$. $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$ et $\mathbf{K}(\beta_1^*, \beta_2^*, \cdots, \beta_r^*)$ sont donc des extensions équivalentes de $\mathbf{K}$. Et pour démontrer que $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^*$ sont des extensions équivalentes de $\mathbf{K}$ il ne nous reste qu'à remarquer qu'un isomorphisme entre $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^*$ conserve nécessairement l'ordre défini par la propriété d'être ou non un carré. On définit par conséquent l'isomorphisme suivant σ de $\mathbf{P}$ sur $\mathbf{P}^*$. Soit α un élément de $\mathbf{P}$, $p(x)$ un polynôme irréductible dans $\mathbf{K}$ dont α est racine, et $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_r$ toutes les racines de $p(x)$ dans $\mathbf{P}$, avec $\alpha = \alpha_k$. Soient maintenant $\alpha_1^* < \alpha_2^* < \cdots < \alpha_r^*$ les racines de $p(x)$ dans $\mathbf{P}^*$, de sorte que $\sigma(\alpha) = \alpha_k^*$. Evidemment σ est bijective et laisse invariants les éléments de $\mathbf{K}$. Il reste montrer que σ est bien un isomorphisme. Pour ce faire, soit $f(x)$ un polynôme quelconque de $\mathbf{K}$, $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s$ ses racines dans $\mathbf{P}$, $\gamma_1^*, \gamma_2^*, \cdots, \gamma_r^*$ celles dans $\mathbf{P}^*$. Soit $g(x)$ le polynôme de $\mathbf{K}$ dont les racines sont les racines carrées des différences entre les racines de $f(x)$. $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_t$ sont les racines de $g(x)$ dans $\mathbf{P}$, $\delta_1^*, \delta_2^*, \cdots, \delta_t^*$ celles dans $\mathbf{P}^*$. D'après ce qui précède, $\mathbf{G} = \mathbf{K}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_t)$ et $\mathbf{G}^* = \mathbf{K}(\gamma_1^*, \gamma_2^*, \cdots, \gamma_r^*, \delta_1^*, \delta_2^*, \cdots, \delta_t^*)$ sont des extensions équivalentes de $\mathbf{K}$. [L'isomorphisme] τ associe à chaque à chaque γ un γ^* et à chaque δ un δ^*. On choisit les notations de sorte que $\tau(\gamma_k) = \gamma_k^*$ et $\tau(\delta_k) = \delta_k^*$. Par ailleurs, en supposant $\gamma_k < \gamma_l$ (dans $\mathbf{P}$), on a : $\gamma_l - \gamma_k = \delta_h^2$ pour un certain indice h, donc aussi : $\gamma_l^* - \gamma_k^* = \delta_h^{*2}$, et par conséquent $\gamma_k^* < \gamma_l^*$ (dans $\mathbf{P}^*$). Ainsi, τ associe les unes aux autres dans les racines de $f(x)$ dans $\mathbf{P}$ et dans $\mathbf{P}^*$ en respectant l'ordre. Puis ceci vaut aussi pour les racins dans $\mathbf{K}$ des facteurs irréductibles de $f(x)$, nous avons : $\tau(\gamma_k) = \sigma(\gamma_k)$ ($k = 1, 2, \cdots, s$). En s'arrangeant pour que deux éléments quelconques donnés de $\mathbf{P}$ α, β, ainsi que $\alpha + \beta$ et $\alpha \cdot \beta$ figurent parmi les racines de $f(x)$, on se rend compte que σ est un isomorphisme de $\mathbf{P}$ sur $\mathbf{P}^*$ et de plus le seul qui laisse fixe les éléments de $\mathbf{K}$. Si on choisit $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}$ on voit que notre affirmation sur les automorphismes de $\mathbf{P}$ est correcte.

Nous cherchons maintenant un corps ordonné dont l'ordre satisfait l'axiome d'Archimède, resp. une certaine généralisation de celui-ci.

Soit $\mathbf{G}$ un corps ordonné, $\mathbf{K}$ un sous-corps de $\mathbf{K}$ [lire $\mathbf{G}$]. Un élément α de $\mathbf{G}$ est dit "infiniment grand relativement à $\mathbf{K}$" si $|\alpha| > c$ pour tout élément c de $\mathbf{K}$. Un élément α de $\mathbf{G}$ est dit au contraire "infiniment petit relativement à $\mathbf{K}$" si $0 < |\alpha| < c$ pour tout élément positif c de $\mathbf{K}$.

Si α est infiniment grand relativement à $\mathbf{K}$, alors $\frac{1}{\alpha}$ est infiniment petit relativement à $\mathbf{K}$, et inversement.

Un corps ordonné contenant $\mathbf{K}$ est dit "archimédien relativement à $\mathbf{K}$" s'il ne contient aucun infiniment grand (ou petit) relativement à $\mathbf{K}$. Dans le cas où $\mathbf{K}$ est le corps des nombres rationnels, on ne précisera pas "relativement à $\mathbf{K}$".

Soit $\mathbf{K_1}$ un corps archimédien relativement à $\mathbf{K_2}$, avec $\mathbf{K_2}$ archimédien relativement à $\mathbf{K_3}$, alors $\mathbf{K_1}$ est aussi Archimédien relativement à $\mathbf{K_3}$.

Un corps $\mathbf{A}$ entre $\mathbf{G}$ et $\mathbf{K}$ est en particulier "archimédien maximal relativement à $\mathbf{K}$" si $\mathbf{A}$ est archimédien relativement à $\mathbf{K}$ et s'il n'existe pas d'extension de $\mathbf{A}$ contenue dans $\mathbf{G}$ qui soit archimédienne relativement à $\mathbf{K}$.

On montre sans peine par un bon ordre (cf démonstration du théorème 7) qu'il existe au moins un tel corps $\mathbf{A}$ archimédien maximal relativement à $\mathbf{K}$ contenu dans $\mathbf{G}$. On montre que l'on peut choisir $\mathbf{A}$ de sorte qu'il contienne un sous-corps $\mathbf{G}$ donné archimédien relativement à $\mathbf{K}$.

On démontre de plus pour les corps réels clos :

Théorème 9 *Soit* $\mathbf{P}$ *un corps réel clos et* $\mathbf{K}$ *un sous-corps de* $\mathbf{P}$*. Alors tous les sous-corps archimédiens maximaux de* $\mathbf{P}$ *relativement à* $\mathbf{K}$ *sont des extensions de* $\mathbf{K}$ *équivalentes et elles sont réellement closes.*

Soit $\mathbf{A}$ un sous-corps de $\mathbf{P}$ archimédien maximal relativement à $\mathbf{K}$. Démontrons d'abord que tout élément ρ de $\mathbf{P}$ algébrique relativement à $\mathbf{A}$ appartient à $\mathbf{A}$. En effet, tout élément de $\mathbf{A}(\rho)$ est algébrique relativement à $\mathbf{A}$, et est par conséquent, d'après le théorème 6, plus petit qu'un certain élément de $\mathbf{A}$. Ainsi, $\mathbf{A}(\rho)$ ne contient aucun élément infiniment grand relativement à $\mathbf{A}$; il est par conséquent archimédien relativement à $\mathbf{A}$, et donc aussi relativement à $\mathbf{K}$, i.e. $\mathbf{A}(\rho) = \mathbf{A}$.

Par ailleurs, tout polynôme de degré impair à coefficients dans $\mathbf{A}$ possède une racine dans $\mathbf{P}$. Or d'après ce qui précède, cette racine appartient à $\mathbf{A}$. De plus, la racine carrée d'un élement positif de $\mathbf{A}$ appartient à $\mathbf{A}$. D'après le théorème 3a, $\mathbf{A}(i)$ est algébriquement clos et par conséquent aucune extension algébrique de $\mathbf{A}$ n'est réelle, $\mathbf{A}$ est donc réel clos.

Soit maintenant Γ l'ensemble des éléments de $\mathbf{P}$ qui ne sont pas infiniment grands par rapport à $\mathbf{K}$. Γ est clairement un anneau. Soit u l'ensemble des éléments de $\mathbf{P}$ supérieurs à 0 et infiniment petits relativement à $\mathbf{K}$. u est une partie de Γ, et u est même un idéal premier de Γ. En effet, la différence entre deux infiniment petits est clairement infiniment petite, et le produit de deux éléments est infiniment petit si et seulement si au moins l'un des deux éléments est infiniment petit. Soit $\mathfrak{U}$ le domaine des classes d'équivalences mod u. $\mathfrak{U}$ est un corps car si $\gamma \not\equiv 0(\mathrm{u})$, γ n'est pas infiniment petit, et $\frac{1}{\gamma}$ n'est donc pas infiniment grand relativement à $\mathbf{K}$, i.e. $\frac{1}{\gamma}$ appartient à Γ. Les éléments d'une classe d'équivalence mod u différente de 0 sont soit tous positifs, soit tous négatifs ; ainsi, on dit qu'une classe d'équivalence différente de 0 est positive quand ses éléments sont positifs. $\mathfrak{U}$ est ainsi ordonné puisque toutes les conditions de la propriété "être positif" sont vérifiées. Dans toute classe modulo u, il y a au plus un élément de $\mathbf{K}$[8]. Ainsi, les représentants dans $\mathbf{K}$ des classes d'équivalences

[8]De $a \equiv b$ mod(u) il résulte $a - b \in$ u, c'est-à-dire soit $a - b$ est 0, soit $a - b$ est infiniment petit relativement à $\mathbf{K}$, et donc $a = b$ car a et b appartiennent à $\mathbf{K}$.

forment un sous-corps $\mathfrak{R}$ de $\mathfrak{U}$ isomorphe à $\mathbf{K}$. $\mathfrak{U}$ est archimédien relativement à $\mathfrak{R}$, car Γ ne contient pas d'élément infiniment grand relativement à $\mathbf{K}$, et par conséquent $\mathfrak{U}$ ne contient pas de classe infiniment grande relativement à $\mathfrak{R}$.

Nous affirmons à présent que tout sous-corps $\mathbf{A}$ de $\mathbf{P}$ archimédien maximal relativement à $\mathbf{K}$ est composé d'un système complet de représentants des classes d'équivalences mod u isomorphe à $\mathfrak{U}$ de telle sorte que tout élément de $\mathbf{A}$ soit associé à la classe d'équivalence qu'il représente. (La démonstration du théorème 9 sera ensuite complète). Une classe d'équivalence mod u contient au plus un élément de $\mathbf{A}$, et inversement tout élément de $\mathbf{A}$ appartient à $\mathbf{\Gamma}$, donc aussi à une classe d'équivalence mod u. Mais toute classe d'équivalence contient aussi au moins un élément de $\mathbf{A}$. Supposons donc que la classe d'équivalence $\boldsymbol{R}$ ne contienne aucun élément de $\mathbf{A}$! Par un raisonnement déjà vu, tous les éléments de $\boldsymbol{R}$ seraient transcendants par rapport à $\mathbf{A}$. Soit t un élément de $\boldsymbol{R}$. Nous voulons montrer que $\mathbf{A}(t)$ est archimédien relativement à $\mathbf{A}$, et donc aussi relativement à $\mathbf{K}$. (Ceci nous donnera notre contradiction). Comme tout élément de $\mathbf{A}(t)$ peut se mettre sous la forme $\frac{f(t)}{g(t)}$, où f et g sont des polynômes à coefficients dans $\mathbf{A}$, et comme en outre $f(t)$ appartient à Γ, et par conséquent n'est pas infiniment grand relativement à $\mathbf{K}$, aussi suffit-il de démontrer que $g(t)$ n'est pas infiniment petit relativement à $\mathbf{A}$. Nous choisissons pour cela deux éléments a, b de $\mathbf{A}$ tels que $a < t < b$ et tels que $g(x)$ n'ait pas de racine (dans $\mathbf{P}$) dans l'intervalle $a \leq x \leq b$. Cela est toujours possible. Dans le cas où $g(x)$ n'admet aucune racine (dans $\mathbf{P}$) qui soit plus grande que t, alors b est un élément quelconque de $\mathbf{A}$ plus grand que t. Sinon, soit b' la plus petite racine de $g(x)$ qui soit plus grande que t. Alors b' est algébrique relativement à $\mathbf{A}$, et donc appartient à $\mathbf{A}$, et on a : $b' \not\equiv t$ (u). Ainsi, $b' - t$ n'est pas infiniment petit relativement à $\mathbf{K}$, et il existe donc un $c > 0$ dans $\mathbf{K}$ tel que $b' - t > c$. Posons $b = b' - c$, nous avons $t < b < b'$ et $g(x)$ ne s'annule pas pour $t \leq x \leq b$. On définit a de la même manière. Alors $|g(x)|$ possède pour $a \leq x \leq b$ un minimum positif μ. Supposons $\mu = |g(\xi)|$, où ξ est, d'après le théorème 6, soit une racine de $g'(x)$ dans l'intervalle considéré, soit l'un des éléments a ou b. Dans tous les cas, ξ appartient à $\mathbf{A}$, et donc μ aussi. $|g(t)|$ est donc au moins plus grand que l'élément positif μ de $\mathbf{A}$, et par conséquent $|g(t)|$ n'est pas infiniment petit relativement à $\mathbf{A}$.

3 Exemples et applications

Nous voulons dans cette dernière partie exposer quelques applications au corps des nombres algébriques et donner quelques exemples de corps réels qui jettent un nouvel éclairage sur les résultats précédents.

Pour construire nos exemples, il convient d'introduire le lemme très pratique suivant :

Lemme 2 *Soit* $\mathbf{K}$ *le corps des fractions d'un anneau ordonné* $\mathbf{R}$*, alors* $\mathbf{K}$ *peut être ordonné d'une et une seule manière, l'ordre sur* $\mathbf{R}$ *étant conservé.*

Supposons $\mathbf{K}$ ordonné comme nous le voulons. Soit $a = \frac{b}{c}$ un élément quelconque de $\mathbf{K}$ où b et c sont des éléments de l'anneau et $c \neq 0$, alors on a $a > 0, -a > 0$ ou $a = 0$, et de même : $bc > 0, bc = 0$ ou $-bc > 0$. L'ordre de $\mathbf{K}$ est donc déterminé de manière unique. Réciproquement, en posant que $a > 0$ lorsque $bc > 0$, on obtient clairement sur $\mathbf{K}$ une relation d'ordre qui conserve celle de $\mathbf{R}$.

En particulier, le corps des nombres rationnels peut être muni d'une seule relation d'ordre de sorte que les nombres entiers soient munis de leur ordre habituel. Nous obtenons grâce au théorème 8 :

Théorème 8a. *Aux isomorphismes de corps près, il existe un et un seul corps réel clos qui soit absolument algébrique : le corps des nombres algèbriques "*$\mathfrak{reels}$*"*[9] *au sens usuel du terme*[10].

En outre, nous avons le résultat:

Théorème 10 *Un corps réel absolument algébrique* $\mathbf{K}$ *est toujours isomorphe à un corps de nombres* $\mathfrak{reels}$*. Tout ordre sur* $\mathbf{K}$ *engendre inversement un unique isomorphisme entre* $\mathbf{K}$ *et un corps de nombres* $\mathfrak{reels}$ *de sorte que l'ordre de* $\mathbf{K}$ *soit transformé dans l'ordre naturel des corps* $\mathfrak{reels}$*. Deux ordres diffrents de* $\mathbf{K}$ *donnent le même corps de nombres* $\mathfrak{reels}$ *si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par un automorphisme de* $\mathbf{K}$*.*

Soit $\mathbf{K}$ un corps réel absolument algébrique. $\mathbf{K}$ peut être ordonné d'au moins une manière (théorème 7b) ; soit $\mathbf{P}$ une extension de $\mathbf{K}$ absolument algébrique et réellement close qui ne modifie pas l'ordre choisi sur $\mathbf{K}$ (Théorème 8). $\mathbf{P}$ est isomorphe au corps $\mathbf{P}^*$ de tous les nombres algébriques $\mathfrak{reels}$ et ainsi $\mathbf{K}$ est aussi isomorphe à un sous-corps $\mathbf{K}^*$ de $\mathbf{P}^*$. Comme l'isomorphisme entre $\mathbf{P}$ et $\mathbf{P}^*$ respecte l'ordre, l'ordre sur $\mathbf{K}$ est envoyé sur l'ordre usuel de $\mathbf{K}^*$. Inversement, tout isomorphisme de $\mathbf{K}$ sur un corps de nombres $\mathfrak{reels}$ $\mathbf{K}^*$ définit un ordre sur $\mathbf{K}$, puisque l'isomorphisme transfère l'ordre naturel de $\mathbf{K}^*$. La biunivocité résulte de la remarque selon laquelle un corps de nombres $\mathfrak{reels}$ n'a pas d'autres automorphismes que l'identité et qu'il n'y a pas d'isomorphisme entre deux corps $\mathfrak{reels}$ différents conservant leur ordre naturel.

Comme cas particulier nous avons le :

Théorème 10a. *Le nombre de corps de nombres* $\mathfrak{reels}$ *isomorphes à un certain corps de nombres algébriques de type fini* $\mathbf{K}$ *est égal au nombre de relations d'ordre différentes dont peut être muni* $\mathbf{K}$*, il est donc nul quand* $\mathbf{K}$ *n'est pas réel.*

En contraste avec théorème 8a, on a dans le cas transcendant :

Théorème 11 *Soit* $\mathbf{\Omega}$*un corps algébriquement clos, de caractéristique nulle, qui n'est pas absolument algébrique, alors il existe deux*[11] *sous-corps réels clos*

[9] "Réel" pris au sens habituel sera, ici et dans la suite, écrit en fraktur.

[10] Ce théorème est déjà démontré dans *Ibidem*, mais pas de manière purement algébrique.

[11] Et même une infinité.

non-isomorphes $\mathbf{P_1}$ *et* $\mathbf{P_2}$ *de* $\mathbf{\Omega}$ *tels que :* $\mathbf{P_1}(i) = \mathbf{P_2}(i) = \mathbf{\Omega}$. *Si de plus le degré de transcendance de* $\mathbf{\Omega}$ *est* $\leq \mathfrak{c}$ *(*$\mathfrak{c}$*= puissance du continu), alors on peut choisir* $\mathbf{P_1}$ *et* $\mathbf{P_2}$ *archimédiens.*

Soit $\mathbf{R}$ le corps des rationnels, $\mathfrak{R}$ le corps de tous les nombres réels. Donnons-nous dans $\mathfrak{R}$ une base $\mathfrak{B}$ des nombres transcendants, c'est-à-dire un ensemble satisfaisant les propriétés : 1. Tout nombre appartenant à $\mathfrak{B}$ est transcendant par rapport au corps obtenu en ajoutant à $\mathbf{R}$ les autres éléments de $\mathfrak{B}$. 2. $\mathfrak{R}$ est algébrique par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{B})$. (L'existence d'un tel ensemble se démontre comme d'habitude).

Soit $\mathbf{\Omega}$ un corps algébriquement clos, de caractéristique nulle, de degré de transcendance t (> 0), et on suppose $t \leq \mathfrak{c}$. Nous pouvons alors choisir deux sous-ensembles de $\mathfrak{B}$ non identiques, $\mathfrak{B}_1$ et $\mathfrak{B}_2$, de puissance t et a un élément appartenant à $\mathfrak{B}_1$ mais pas à $\mathfrak{B}_2$. Soient $\mathbf{\Omega_1}$ et $\mathbf{\Omega_2}$ les corps des nombres (complexes), algébriques par rapport à $\mathbf{R}(\mathfrak{B}_1)$ et $\mathbf{R}(\mathfrak{B}_2)$. $\mathbf{\Omega}$ est isomorphe aux corps $\mathbf{\Omega_1}$ et $\mathbf{\Omega_2}$. Soient $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ les corps des nombres réels contenus dans $\mathbf{\Omega_1}$ et $\mathbf{\Omega_2}$. Comme $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ sont réellement clos, on a : $\mathbf{P_1}(\mathbf{i}) = \Omega_1$ et $\mathbf{P_2}(\mathbf{i}) = \Omega_2$, mais $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ ne sont pas isomorphes. En effet : supposons qu'il existe un isomorphisme entre $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ alors il doit d'une part laisser fixes les nombres rationnels, et d'autre part conserver l'ordre (Théorème 1). Mais cela est impossible car il n'y a pas de nombre dans $\mathbf{P_2}$ qui engendre la même partie dans $\mathbf{R}$ que celle engendrée par $\mathbf{P_1}$ contenant a. Compte tenu des isomorphismes entre $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega_1}$ et $\mathbf{\Omega_2}$, $\mathbf{\Omega}$ contient deux sous-corps isomorphes respectivement à $\mathbf{P_1}$ et $\mathbf{P_2}$ et qui engendrent $\mathbf{\Omega}$ par l'adjonction de i. L'hypothèse est ainsi démontrée pour $t \leq c$.

Pour $t(> 0)$ quelconque, nous continuons comme suit. Soit $\mathfrak{X}$ une base de transcendance de $\mathbf{\Omega}$. $\mathfrak{X}$ est ordonné[12] de manière quelconque. Nous ordonnons maintenant les produits de puissances d'éléments de $\mathfrak{X}$: soient $x_1, \cdots, x_n$ un nombre fini d'éléments de $\mathfrak{X}$, numérotés suivant l'ordre de $\mathfrak{X}$; alors le produit $x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$ est *inférieur* au produit $x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ si la première différence non nulle $b_j - a_j$ est positive. Soit maintenant $f(x)$ un polynôme du domaine de polynômes $\mathbf{R}[\mathfrak{X}]$. Nous définissons alors : $f(x)$ positif si le coefficient de la première puissance de x dans l'expression de $f(x)$ est positif[13]. Ainsi, l'anneau $\mathbf{R}[\mathfrak{X}]$ est ordonné et donc aussi le corps $\mathbf{R}(\mathfrak{X})$ de ses fractions d'après notre lemme. Soit $\mathbf{P_1}$ l'extension de $\mathbf{R}(\mathfrak{X})$ réellement close, contenue dans $\mathbf{\Omega}$, munie de l'ordre de $\mathbf{R}(\mathfrak{X})$. Il est maintenant clair que $\mathbf{\Omega} = \mathbf{P_1}(i)$, et le sous-corps archimédien maximal de $\mathbf{P_1}$ a le type du corps de tous les nombres algébriques réels.

On ordonne maintenant $\mathbf{R}[\mathfrak{X}]$, et par conséquent $\mathbf{Q}(\mathfrak{X})$, d'une autre manière : soit y un élément fixé de $\mathfrak{X}$, et $\mathfrak{X}'$ l'ensemble restant. Nous ordonnons les produits de puissances d'éléments de $\mathfrak{X}'$ comme précédemment. Soit $f(y, x')$ un élément du domaine des polynômes $\mathbf{R}(\mathfrak{X})$ et $g(y)$ le coefficient de la première

[12]"Ordonné" est à prendre dans le sens de la théorie générale des ensembles, et non dans le sens de l'ordre des corps réels

[13]Cet ordre signifie : Tout élément x de $\mathfrak{X}$ est positif et infiniment petit relativement aux polynômes en les éléments de $\mathfrak{X}$ qui suivent x.

puissance de x' dans l'expression de $f(y, x')$, on définit alors un nouvel ordre : $f(y, x')$ est positif si $g(e)$ est un nombre $\mathfrak{r\acute{e}el}$ positif, où e désigne la base du logarithme naturel. Nous choisissons un corps réel clos $\mathbf{P_2}$ entre $\mathbf{R}(\mathfrak{X})$ et $\mathbf{\Omega}$ qui conserve le nouvel ordre de $\mathbf{R}(\mathfrak{X})$, et nous avons : $\mathbf{P_2}(i) = \mathbf{\Omega}$. Mais $\mathbf{P_2}$ contient alors un sous-corps archimédien de degré de transcendence 1, c'est-à-dire $\mathbf{R}(\mathbf{y})$. Par suite, $\mathbf{P_2}$ ne peut pas être isomorphe à $\mathbf{P_1}$ (théorème 9).

Dans un corps réel clos, les racines d'un polynôme à coefficients dans ce corps peuvent toujours être séparées. L'exemple simple qui suit montre que ceci n'est plus nécessairement vrai dans un corps ordonné qui n'est pas réel clos : soit $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ le corps des fonctions rationnelles d'indéterminée x à coefficients rationnels. Nous ordonnons $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ par la condition : x doit être positif et infiniment petit, i.e. c'est le terme de plus petit degré d'un polynôme qui est déterminant. Dans le corps réel clos associé, relativement algébrique, l'équation $(y^2 - x)^2 - x^3 = 0$ possède deux racines positives : $\sqrt{x(1 \pm \sqrt{x})}$. Ces deux racines ne peuvent pas être séparées dans $\mathbf{R}(\mathbf{x})$. Cet exemple montre que la preuve d'unicité dans le théorème 8 doit être menée sans la séparation des racines.

Enfin il nous reste encore à démontrer qu'un corps ordonné, qui n'est pas réel clos, peut posséder des sous-corps archimédiens maximaux non isomorphes. Pour cela, soit $\mathbf{A}$ le corps de tous les nombres algébriques $\mathfrak{r\acute{e}els}$, muni de l'ordre usuel ; $\mathbf{A}(e)$ désigne le corps obtenu à partir de $\mathbf{A}$ par l'adjonction de e, base du logarithme naturel ; soit $\mathbf{P}$ le corps (réel clos) des nombres $\mathfrak{r\acute{e}els}$ algébriques par rapport à $\mathbf{A}(e)$. Considérons maintenant le corps $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{P}(x)$ obtenu à partir de $\mathbf{P}$ par l'adjonction d'une indéterminée x infiniment petite. $\mathbf{P}$ et $\boldsymbol{A}(e + x)$ sont alors deux sous-corps archimédiens de $\mathbf{G}$. On peut montrer que ces deux derniers sont en fait archimédiens maximaux. Néanmoins, ils ne sont pas isomorphes, puisque $\mathbf{P}$ est réel clos mais que $\boldsymbol{A}(e + x)$ ne l'est pas.

Hambourg, séminaire de mathématiques, Juin 1926.

Une traduction de ce texte a été réalisée par Claire Lapalle et Matthieu Petit dans le cadre du Magister de mathématiques 1ère année de l'Université de Rennes I. Cette traduction a été ensuite reprise par Alain Herreman et Michel Coste.