Tours modulaires et torsion des variétés abéliennes

Anna Cadoret

Séminaire de géométrie Algébrique de l'I.R.M.A.R., Université de Rennes 1

Jeudi 15 Juin 2006

Abstract

Les tours modulaires sont des tours d'espaces de Hurwitz $\underline{\mathcal{H}}(\tilde{\phi}, \mathbf{C})$ définies par les données (1) d'une extension de groupes profinis $1 \to P \to \tilde{G} \stackrel{\tilde{\phi}}{\to} G \to 1$ où G est un groupe fini et P un pro-p group dont l'abélianisé s'écrit $P^{ab} = \mathbb{Z}_p^\rho \oplus \mathrm{Tors}(P^{ab})$ avec ρ, $|\mathrm{Tors}(P^{ab})| < \infty$ et (2) d'un r-uplet de p'-classes de conjugaison de G. Plus précisément, si P_n est le n-ième terme de la série de Frattini de P, le n-ième niveau $\mathcal{H}_n(\tilde{\phi}, \mathbf{C})$ de la tour modulaire associée à $(\tilde{\phi}, \mathbf{C})$ classifie les G-revêtements de $\mathbb{P}^1$ de groupe $G_n := \tilde{G}/P_n$ qui se décomposent sous la forme suivante:

$$f_n : X_n \stackrel{f_n^0}{\to} X_0 \stackrel{f_0}{\to} \mathbb{P}^1$$

où f_n^0 est un G-revêtement étale de groupe P/P_n et f_0 un G-revêtement ramifié de groupe G_0 et d'invariant canonique de l'inertie $\mathbf{C}$.

La tour modulaire (réduite) associée à l'extension du groupe dihédrale D_{2p} par le groupe pro-dihédrale D_{2p^∞} et à 4 copies de la classe de conjugaison I des involutions dans D_{2p} est la tour des courbes modulaires $(Y_1(p^{n+1}) \to Y_1(p^n))_{n \geq 1}$.

On conjecture que les propriétés arithmétiques de la tour des courbes modulaires s'étendent aux tours modulaires; en particulier le théorème de Mazur-Merel, qui devient dans ce contexte la "Modular tower conjecture". En termes de Galois inverse, cette conjecture implique que si l'on se fixe un entier $r \geq 3$ alors seul un nombre fini de groupes G_n peuvent être réalisés régulièrement sur $\mathbb{Q}$ avec moins de r points de ramification.

Je commencerai par construire un quotient fini des tours modulaires classiques (tours modulaires abélianisées) qui "codent" (en un sens à préciser) les propriétés arithmétiques de la torsion des jacobiennes des courbes X_0. J'exploiterai ensuite cette construction pour montrer certaines propriétés arithmétiques des tours modulaires:

(1) $\varprojlim \mathcal{H}_n(\tilde{\phi}, \mathbf{C})(k^{cyc}) = \emptyset$ (k corps de nombres).
(2) Liens avec la conjecture de torsion forte pour les variétés abéliennes.
(3) Conjecture dihédrale sur $\mathbb{Q}^{ab}$.