Quelques bords irrationnels de variétés de Shimura

Frédéric Paugam

Regensburg

Résumé

Les variétés de Shimura sont essentiellement des espaces du type $G(\mathbb{Z})\backslash G(\mathbb{R})/K$ avec G un groupe réductif sur $\mathbb{Z}$ et K un sous-groupe compact maximal dans $G^{ad}(\mathbb{R})$. Ces espaces ont de profondes application arithmétiques.

L'habitude est de les compactifier en ajoutant des composantes de bord rationnelles correspondant aux paraboliques rationnels $P \subset G$. A un tel parabolique correspond aussi une composante de bord irrationnelle du domaine $G(\mathbb{R})/K$ de la forme $G(\mathbb{R})/P(K)$ avec $P(K) = M(K)AN$ le parabolique réel associé à P. On montre sur des exemples que les ensembles quotients $G(\mathbb{Z})\backslash G(\mathbb{R})/P(K)$ appelés bords irrationnels et surtout leurs revêtements

$$G(\mathbb{Z})\backslash G(\mathbb{R})/M(K)A^+$$

ont aussi un intérêt pour l'arithmétique.

Plus précisément, on cherche une formulation en rang supérieur, utilisant ce type d'espaces, de la question de multiplication réelle posée par Manin. Ce problème, relié au 12-ième problème de Hilbert pour les corps quadratiques réels et à sa solution hypothétique donnée par les conjectures de Stark, est de trouver des objets naturels de géométrie non commutative permettant de remplacer les courbes elliptiques qui répondent, elles, au douzième problème de Hilbert pour les corps quadratiques imaginaires. Plus précisément, cette question de Manin en rang supérieur comporte, de notre point de vue, deux phases :

1. une formalisation du problème en termes de morphismes de groupes algébriques analogue à la formulation à la Shimura/Deligne de la théorie de la multiplication complexe.
2. un travail de géométrie algébrique non commutative, qui est de définir une notion utile pour cette question de variété abélienne non commutative sur un corps de nombres, dont les modules seraient naturellement liés aux fonctions Zeta de Stark, et dont les périodes redonneraient nos objets d'algèbre linéaire.

On va s'intéresser dans cet exposé à la première phase. La deuxième phase est pour le moment dans ses balbutiements, autant dans notre travail que dans la littérature, malgré quelques avancées notables par Schwarz/Polishchuk et Manin. On espère que la deuxième phase fera jouer un rôle important aux variétés abéliennes usuelles comme dans les travaux de Polishchuk en rang 1. C'est ce qui explique pourquoi on regarde les bords de leurs espaces de modules.