Représentations p-adiques cristallines et de de Rham dans le cas relatif

Olivier Brinon (Orsay)

Résumé : Cet exposé est consacrée à la théorie de Fontaine des représentations p-adiques cristallines et de de Rham dans une situation relative. Soient p un nombre premier, k un corps parfait de caractéristique p et $W = \mathrm{W}(k)$. Soient $d \in \mathbb{N}$ et S une partie multiplicative de $W[t_1, ..., t_d]$ avec $S \cap (p) = \varnothing$ et $t_i \in S$ $(1 \leq i \leq d)$. On note A^0 le séparé complété de $S^{-1}W[t_1, ..., t_d]$ pour la topologie p-adique, A une A^0-algèbre intègre finie étale, et $K = A\big[\frac{1}{p}\big]$. Soit $\overline{E}$ une clôture algébrique de $\mathrm{Frac}(K)$ et $G = \pi_1(\mathrm{Spec}(K), \mathrm{Spec}(\overline{E}))$. On se donne un relèvement σ du Frobenius sur A^0.

On définit les notions de représentation p-adique cristalline et de de Rham (horizontale) de G. On construit pour cela quatre anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$, B_{dR} et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\nabla}$. Ce sont des $\mathbb{Q}_p$-algèbres topologiques munies de structures supplémentaires : action de G, filtration, connexion (sur B_{dR} et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$), Frobenius σ-semi-linéaire (sur $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}^{\nabla}$). Comme dans la théorie “classique” ($d = 0$), ces anneaux sont reliés par diverses inclusions et une suite exacte fondamentale. Une propriété cruciale (qui repose sur le théorème de pureté de Faltings) de ces anneaux est leur fidèle platitude sur leurs invariants sous G.

Comme d'habitude, on dispose alors de foncteurs $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ (resp. D_{dR}, ...) sur la catégorie des représentations p-adiques de G. Le foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ est pleinement fidèle sur la catégorie des représentations cristallines. Il est à valeurs dans la catégorie des (φ, ∇)-modules filtrés sur K, dont on donne les propriétés de base. On donne des conditions nécessaires d'admissibilité pour les modules filtrés, qui sont suffisantes en rang 1 ou lorsque K est un corps (mais à corps résiduel non parfait). Dans le cas général, la notion de module filtré faiblement admissible et *a fortiori* un résultat analogue à celui de Colmez-Fontaine sont encore à dégager.