"Progrès récents en théorie de Fontaine (Andreatta, Brinon, Faltings, Tsuji,...)"

Francesco Baldassarri (Padova)

Résumé : "Il s'agit d'un exposé en grande partie conjectural. On s'intéresse à la théorie de Fontaine pour les représentations p-adiques du groupe fondamental arithmétique G de la fibre générique d'un ouvert étale $\mathbb{U}$ d'un tôre $\mathbb{T}$ défini sur l'anneau des entiers d'une extension finie K de $\mathbb{Q}_p$. Un papier récent de Andreatta généralise sans restrictions à cette situation la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine. Il s'agit de Modules sur l'espace analytique $\mathbb{U} \times_K \mathbb{B}_K$, où $\mathbb{B}_K$ est l'anneau ainsi noté par Cherbonnier-Colmez. La thèse de Brinon, par contre, introduit les anneaux de Fontaine $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, B_{dR},..., adaptés à cette situation, pour en déduire la définition de certaines classes plus sympathiques de représentations de G: cristallines, de de Rham,.... . Brinon montre que le foncteur $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}$ restreint aux representations cristallines, prend ses valeurs dans une catégorie de (φ, ∇)-modules filtrés faiblement admissibles. Il s'agit probablement de coefficients syntomiques et le résultat est une forme plus parlante de celui de Faltings. Brinon décrit aussi en toute généralité les caractères de G. Le travail de Andreatta suggère un espace géométrique, une sorte de couronne autour de $\mathbb{U}$, où donner un sens aux représentations "surconvergentes" et où on puisse chercher de généraliser les résultats de Berger. La question qu'on se pose, déjà dans le cas $\mathbb{U} := \mathbb{P}^{1,an}_K \setminus D(0,1) \cup D(1,1) \cup D(\infty,1)\} \subset \mathbb{T} = \mathbb{P}^{1,an}_K \setminus D(0,1) \cup D(\infty,1)\}$, est la suivante. Est-ce qu'il existe une notion de faisceau pervers étale"hypergéométrique généralisé" p-adique sur $\mathbb{G}^{an}_{m,K}$ (ou plutôt sur $\mathbb{U}$) défini un peu comme Katz a défini les faisceaux pervers ℓ-adiques hypergéométriques generalises sur le tôre en caractéristique $p \neq \ell$? Quel genre de réprésentations du groupe fondamental de $\mathbb{U}$ on obtient par cette voie? Est-ce que ceux parmi ces faisceaux qui seraient cristallins au sens de Faltings-Brinon, correspondent à des equations hypergéométriques généralisées (confluentes) p-adiques, au sens de Dwork sur $\mathbb{G}^{an}_m$? Qu'est-ce qu'on obtient par spécialisation en les points de $\mu_{d,K}$, pour un d quelconque? Peut-on en déduire des valeurs spéciales de fonctions L p-adiques classiques? Quel est le rapport entre l'existence de l'interpolation p-adique de ces fonctions L et le "principe de Boyarsky" de Dwork? Peut-on expliquer les résultats de Gros, Bannai et Tsuji dans ce cadre? Un problème crucial est celui de définir la transformée de Fourier pour les faisceux étales p-adiques sur $\mathbb{G}^{an}_m$. On utilise pour cela les constructions de Ramero, adaptées au cas des coefficients p-adiques. Est-il possible de définir des faisceaux hypergéométriques "motiviques" sur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$".