

# filtrage particulaire: quelques exemples

Fabien Campillo

23 janvier 06



# plan

- 1 introduction
- 2 filtrage particulaire
  - modélisation
  - filtre
  - approximation
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

# plan

- 1 introduction
- 2 filtrage particulaire
  - modélisation
  - filtre
  - approximation
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

## en pratique...

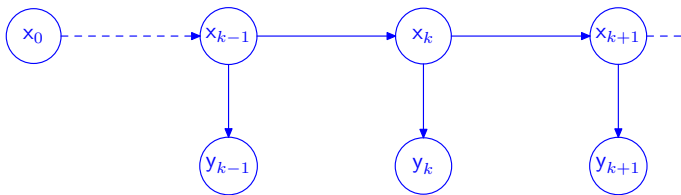
- ▶ des observations

$y_1, y_2, y_3 \dots$  à des instants  $t_1 < t_2 < t_3 \dots$

et c'est tout !

- ▶ une idée sur le problème (et sur ce que l'on recherche)
  - suivre les évolutions d'un état caché  $x_k = X(t_k)$
- ▶ une idée de modélisation
  - un processus d'état  $x_k$ 
    - une idée de l'état initial  $x_0$  (loi initiale)
    - une dynamique sur l'état  $x_k$  (loi de transition)
  - une relation état/observation (loi de proposition)

## exemple : canal sans mémoire



## modèle probabiliste

- ▶ du bruit (intrinsèque au modèle ou servant à masquer les faiblesses du modèle)
- ▶ couple de processus  $(x_k)_{k \geq 0}$  et  $(y_k)_{k \geq 1}$
- ▶ estimer  $x_k$  à partir de  $y_{1:k}$

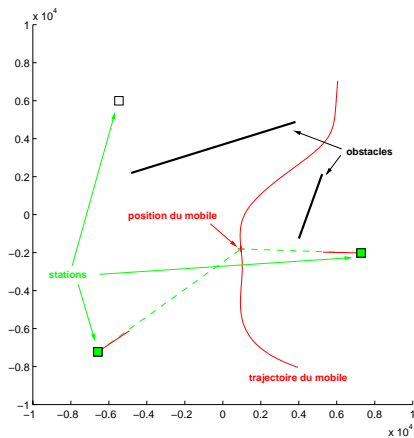
$$\mathbb{P}(x_{k-1} \in dx | y_{1:k-1})$$

- ▶ contrainte temps réel (récursif vs batch) :

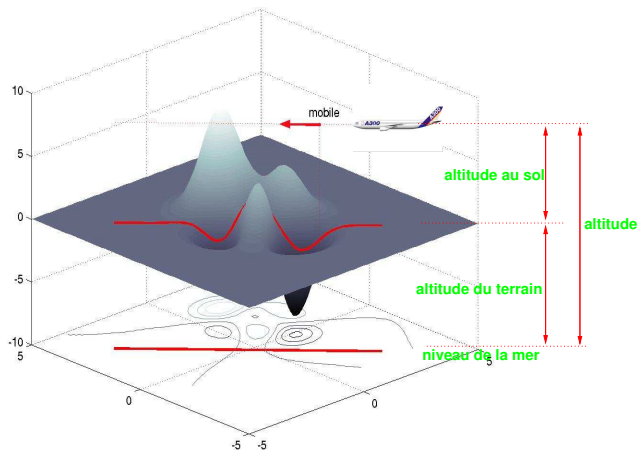
$$\mathbb{P}(x_k \in dx | y_{1:k}) \xrightarrow[\text{mise à jour}]{y_k} \mathbb{P}(x_k \in dx | y_{1:k})$$

→ modèle markovien

## poursuite avec occultation

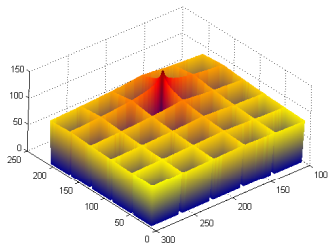
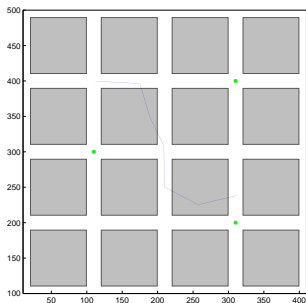


## modèle numérique de terrain





## suivi d'un mobile dans Manhattan



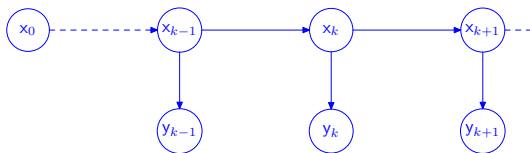
# plan

- 1 introduction
- 2 **filtrage particulaire**
  - modélisation
  - filtre
  - approximation
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

# plan

- 1 introduction
- 2 **filtrage particulaire**
  - modélisation
  - filtre
  - approximation
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

- ▶  $(x_k, y_k)$  un modèle de Markov caché avec hypothèse de “canal sans mémoire”
- ▶ trois objets de base
  - loi initiale  $\mu(dx) = \mathbb{P}(x_0 \in dx)$
  - loi de transition (noyau)  $M_k(x, dx') = \mathbb{P}(x_k \in dx' | x_{k-1} = x)$
  - loi d'émission  $\Gamma_k(x, dy) = \mathbb{P}(y_k \in dy | x_k = x)$



# fonction de vraisemblance

- ▶ modèle dominé

$$\Gamma_k(x, dy) = \mathbb{P}(y_k \in dy | x_k = x) = g_k(x, y) dy$$

- ▶ quantifie l'adéquation (relative)  $x \rightsquigarrow y_k$

$$G_k(x) = g_k(x, y_k)$$

- ▶ exemple : bruit additif gaussien

$$y_k = h(x_k) + v_k \quad v_k \stackrel{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$$

alors

$$G_k(x) \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} |y_k - h(x)|^2 \right]$$

# plan

- 1 introduction
- 2 **filtrage particulaire**
  - modélisation
  - **filtre**
  - approximation
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

► loi jointe

$$\mathbb{P}(x_{0:k} \in dx_{0:k}, y_{0:k} \in dy_{1:k})$$

$$= \mathbb{P}(y_{0:k} \in dy_{1:k} | x_{0:k} = x_{0:k}) \times \mathbb{P}(x_{0:k} \in dx_{0:k})$$

$$= \mathbb{P}(y_{0:k} \in dy_{1:k} | x_{0:k} = x_{0:k}) \times \mu(dx_0) \prod_{\ell=1}^k M_{\ell}(x_{\ell-1}, dx_{\ell}) \quad (\times \text{ Markov})$$

$$= \prod_{\ell=1}^k \mathbb{P}(y_{\ell} \in dy_{\ell} | x_{0:\ell} = x_{0:\ell}) \times \mu(dx_0) \prod_{\ell=1}^k M_{\ell}(x_{\ell-1}, dx_{\ell}) \quad (\text{canal s/m})$$

$$= \prod_{\ell=1}^k \mathbb{P}(y_{\ell} \in dy_{\ell} | x_{\ell} = x_{\ell}) \times \mu(dx_0) \prod_{\ell=1}^k M_{\ell}(x_{\ell-1}, dx_{\ell}) \quad (\text{canal s/m})$$

$$= \mu(dx_0) \prod_{\ell=1}^k [g_{\ell}(x_{\ell}, y_{\ell}) M_{\ell}(x_{\ell-1}, dx_{\ell})] dy_{1:k} \quad (\Delta)$$

- ▶ loi de l'observation

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(y_{0:k} \in dy_{1:k}) &= \int \cdots \int \mathbb{P}(x_{0:k} \in dx_{0:k}, y_{0:k} \in dy_{1:k}) dx_0 \cdots dx_k \\ &= \mathbb{E} \left[ \prod_{\ell=1}^k g_{\ell}(x_{\ell}, y_{\ell}) \right] dy_{1:k}\end{aligned}$$

- ▶ fonction de vraisemblance

$$L_k(y_{1:k}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E} \left[ \prod_{\ell=1}^k g_{\ell}(x_{\ell}, y_{\ell}) \right]$$



- loi de l'état sachant l'observation

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x_{0:k} \in dx_{0:k}, y_{0:k} \in dy_{1:k}) &= \\ &= \mathbb{P}(x_{0:k} \in dx_{0:k} | y_{1:k} = y_{1:k}) \times \mathbb{P}(y_{1:k} \in dy_{1:k})\end{aligned}$$

avec  $(\Delta)$  on obtient

$$\mathbb{P}(x_{0:k} \in dx_{0:k} | y_{1:k} = y_{1:k}) = \frac{\mu(dx_0) \prod_{\ell=1}^k [g_\ell(x_\ell, y_\ell) M_\ell(x_{\ell-1}, dx_\ell)]}{\mathbb{E}[\prod_{\ell=1}^k g_\ell(x_\ell, y_\ell)]}$$

- le filtre

$$\mathbb{E}[\varphi(x_k) | y_{1:k} = y_{1:k}] = \frac{\mathbb{E}[\varphi(x_k) \prod_{\ell=1}^k g_\ell(x_\ell, y_\ell)]}{\mathbb{E}[\prod_{\ell=1}^k g_\ell(x_\ell, y_\ell)]}$$

# filtre bayésien

► filtre

$$\hat{\eta}_k(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{x}_k) | \mathbf{y}_{1:k}] = \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{x}_k) \prod_{\ell=1}^k G_\ell(\mathbf{x}_\ell)]}{\mathbb{E}[\prod_{\ell=1}^k G_\ell(\mathbf{x}_\ell)]} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\hat{\gamma}_k(\varphi)}{\hat{\gamma}_k(\mathbf{1})}$$

► prédicteur

$$\eta_k(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{x}_k) | \mathbf{y}_{1:k-1}] = \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{x}_k) \prod_{\ell=1}^{k-1} G_\ell(\mathbf{x}_\ell)]}{\mathbb{E}[\prod_{\ell=1}^{k-1} G_\ell(\mathbf{x}_\ell)]} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\gamma_k(\varphi)}{\gamma_k(\mathbf{1})}$$

# changement de notation (désolé)

► filtre

$$\eta_k(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{x}_k) | \mathbf{y}_{1:k}] = \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{x}_k) \prod_{\ell=1}^k G_\ell(\mathbf{x}_\ell)]}{\mathbb{E}[\prod_{\ell=1}^k G_\ell(\mathbf{x}_\ell)]} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\gamma_k(\varphi)}{\gamma_k(\mathbf{1})}$$

► prédicteur

$$\eta_{k^-}(\varphi) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbb{E}[\varphi(\mathbf{x}_k) | \mathbf{y}_{1:k-1}] = \frac{\mathbb{E}[\varphi(\mathbf{x}_k) \prod_{\ell=1}^{k-1} G_\ell(\mathbf{x}_\ell)]}{\mathbb{E}[\prod_{\ell=1}^{k-1} G_\ell(\mathbf{x}_\ell)]} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\gamma_{k^-}(\varphi)}{\gamma_{k^-}(\mathbf{1})}$$

# filtre optimal récursif et inutile

$$\eta_{k-1} \xrightarrow{\text{prédiction}} \eta_{k-} = \eta_{k-1} M_k \xrightarrow{\text{correction}} \eta_k = \Psi_k(\eta_{k-})$$

où

$$\eta M_k(dx') \stackrel{\text{déf}}{=} \int \eta(dx) M_k(x, dx')$$

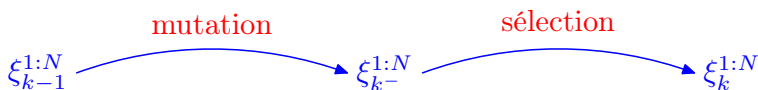
$$\Psi_k(\eta)(dx) \stackrel{\text{déf}}{=} G_k \circ \eta(dx) = \frac{G_k(x)}{\int G_k(x') \eta(dx')} \eta(dx)$$

# plan

- 1 introduction
- 2 **filtrage particulaire**
  - modélisation
  - filtre
  - **approximation**
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

# particules en interaction

on ouvre le livre de Pierre à la bonne page et :



où

▶  $\xi_{k-}^i \sim M_k(\xi_{k-1}^i, dx)$  indépendamment en  $i = 1 : N$

▶  $\xi_k^1 \dots \xi_k^N \stackrel{\text{iid}}{\sim} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta_{\xi_{k-}^i}(dx)$  où  $\omega_k^i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{G_k(\xi_{k-}^i)}{\sum_{i'=1}^N G_k(\xi_{k-}^{i'})}$

## algorithme

---

$\xi_0^1 \cdots \xi_0^N \stackrel{\text{iid}}{\sim} \mu$  % particules initiales

**pour**  $k = 1, 2, \dots$  **faire**

$\xi_{k-}^i \sim \text{loi}(x_k | x_{k-1} = \xi_{k-1}^i)$  pour  $i = 1 : N$  % mutation

acquisition de  $y_k$

$\omega_k^i \leftarrow G_k(\xi_k^i) / \sum_{j=1}^N G_k(\xi_k^j)$  pour  $i = 1 : N$  % vraisemblance

$\xi_k^1 \cdots \xi_k^N \stackrel{\text{iid}}{\sim} \sum_{i=1}^N \omega_k^i \delta_{\xi_{k-}^i}$  % sélection

rendre  $\xi_k^{1:N}$

**fin pour**

---

# plan

- 1 introduction
- 2 **filtrage particulaire**
  - modélisation
  - filtre
  - approximation
  - **implémentation**
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images



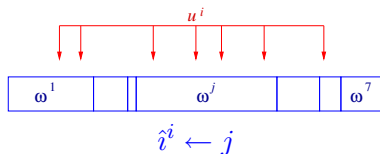
## redistribution

- ▶ on tire  $N$  indices  $(\hat{i}^1, \dots, \hat{i}^N)$  parmi  $(1, \dots, N)$  selon la loi multinomiale  $(\omega_k^1, \dots, \omega_k^N)$

$$\hat{i}^{1:N} \leftarrow \text{resample}(\omega_k^{1:N}) \quad \text{et} \quad \xi_k^{1:N} \leftarrow \xi_k^{\hat{i}^{1:N}}$$

- ▶ rééchantillonnage multinomial  $O(N \log(N))$

$$u^1, \dots, u^N \stackrel{\text{iid}}{\sim} U[0, 1]$$

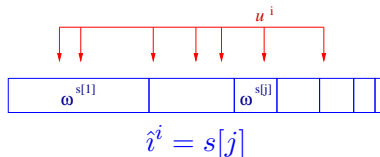


## redistribution (suite)

- ▶ rééchantillonnage multinomial bis  $O(N \log(N))$

$$u^1, \dots, u^N \stackrel{\text{iid}}{\sim} U[0, 1]$$

$$\omega^{s[1]} > \omega^{s[2]} > \dots > \omega^{s[N]}$$

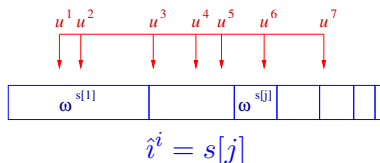


plus rapide (moins de tests)

## redistribution (suite)

- ▶ rééchantillonnage multinomial ter  $O(N)$

statistique d'ordre  $u^1 < u^2 < \dots < u^N \stackrel{\text{iid}}{\sim} U[0, 1]$   
 $\omega^{s[1]} > \omega^{s[2]} > \dots > \omega^{s[N]}$



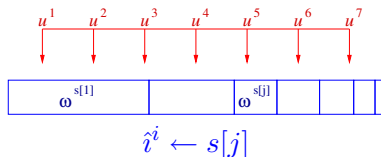
il faut savoir simuler des statistiques d'ordre

## redistribution (suite)

- ▶ le «peigne de Kitagawa»  $O(N)$

$$u_1 \sim U\left[0, \frac{1}{N}\right] \quad \text{et} \quad u^i = u^1 + \frac{i}{N}, \quad i = 2 : N$$

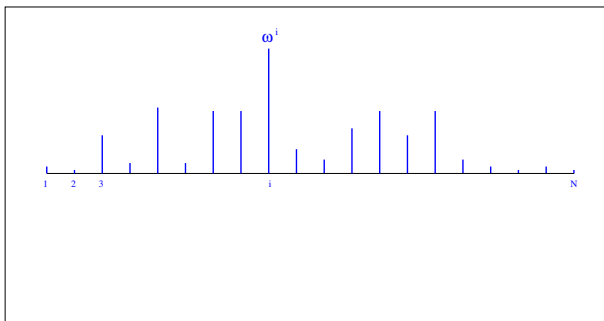
$$\omega^{s[1]} > \omega^{s[2]} > \dots > \omega^{s[N]}$$



mais ça ne marche pas toujours !

# redistribution (suite)

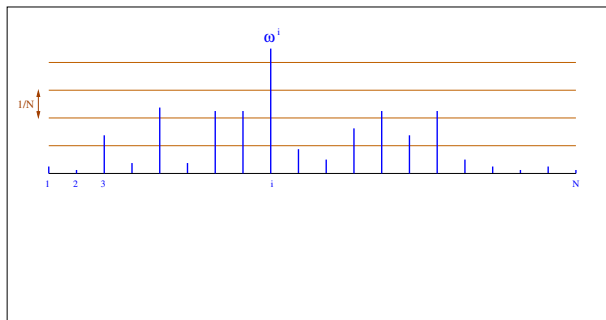
## ► redistribution des résidus



n'a d'intérêt que si la plupart des particules sont sélectionnée dans la première phase déterministe

# redistribution (suite)

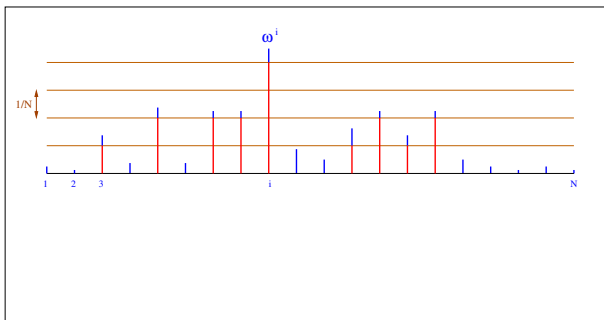
## ► redistribution des résidus



n'a d'intérêt que si la plupart des particules sont sélectionnée dans la première phase déterministe

# redistribution (suite)

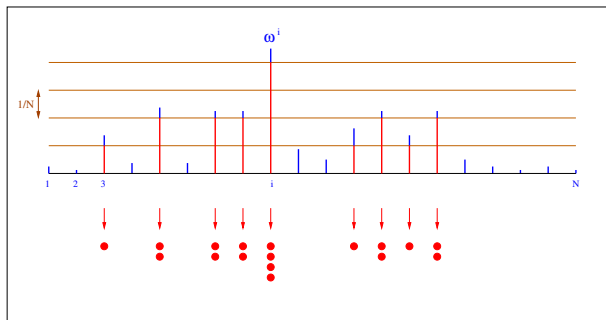
## ► redistribution des résidus



n'a d'intérêt que si la plupart des particules sont sélectionnée dans la première phase déterministe

## redistribution (suite)

## ► redistribution des résidus

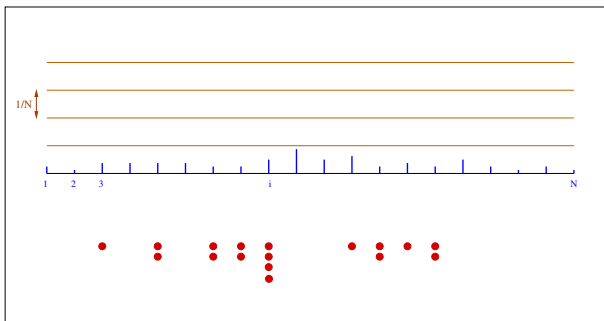


n'a d'intérêt que si la plupart des particules sont sélectionnée dans la première phase déterministe



# redistribution (suite)

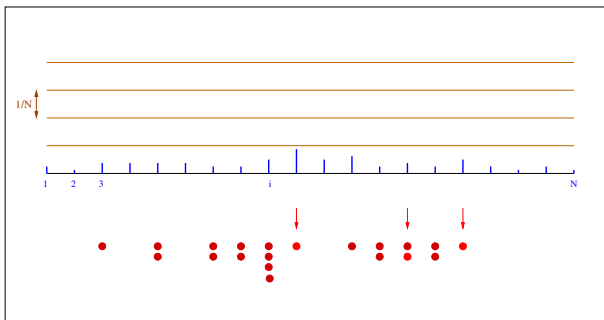
## ► redistribution des résidus



n'a d'intérêt que si la plupart des particules sont sélectionnée dans la première phase déterministe

# redistribution (suite)

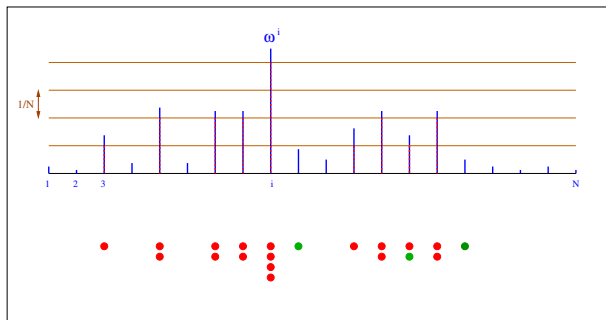
## ► redistribution des résidus



n'a d'intérêt que si la plupart des particules sont sélectionnée dans la première phase déterministe

## redistribution (suite)

## ► redistribution des résidus



n'a d'intérêt que si la plupart des particules sont sélectionnée dans la première phase déterministe

# quand redistribuer ?

- ▶ un critère (“nombre de particules efficaces”)

$$N_k^{\text{eff}} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\sum_{i=1}^N (\omega_k^i)^2} \in [1, N] \quad \left\{ \begin{array}{l} \simeq 1 \quad \text{mauvais} \\ \simeq N \quad \text{bon} \end{array} \right.$$

## in fine

### ► les ingrédients

- modèle

- simuler selon  $\text{loi}(x_0)$
- simuler selon  $M_k(x, dx') = \text{loi}(x_{k+1} | x_k = x)$  quelque soit  $x$
- évaluer  $G_k(x) = g_k(x, y_k)$  pour tout  $x$  à  $y_k$  fixé

- rééchantillonnage

- une routine de rééchantillonnage
- attention au générateur  $U[0, 1]$

### ► extensions

- simuler selon  $\tilde{M}_k(x, dx')$  et corriger avec  $\tilde{G}_k(x)$
- d'autres idées pour le rééchantillonnage
- adapter le nombre de particules ?
- multimodale ?

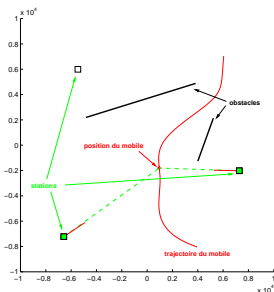
# plan

- 1 introduction
- 2 filtrage particulaire
  - modélisation
  - filtre
  - approximation
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

# plan

- 1 introduction
- 2 filtrage particulaire
  - modélisation
  - filtre
  - approximation
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

# poursuite avec occultation



- ▶ un mobile dans le plan
  - ▶  $S$  stations de mesure : mesures d'angle
  - ▶  $L$  segments : occultent le déplacement du mobile
- (exemple dû à Simon Maskell)



## modèle

▶ équation d'état  $x_k = \begin{pmatrix} r_k^1 \\ r_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{k-1}^1 \\ r_{k-1}^2 \end{pmatrix} + \sigma_w \begin{pmatrix} w_k^1 \\ w_k^2 \end{pmatrix}$

▶ initialisation  $x_0 \sim \mathcal{N}(\bar{x}_0, \sigma_0^2 I)$

- ▶ équation d'observation : pour chacune des stations  $s = 1 \dots S$
- si la station  $s$  ne voit pas le mobile  $\rightarrow$  pas de mesure
  - si la station  $s$  voit le mobile la mesure est :

$$y_k^s = h_s(x_k) + \sigma_v v_k \quad \text{avec} \quad h_s(x) = \arctg\left(\frac{r^1 - r^{s,1}}{r^2 - r^{s,2}}\right)$$

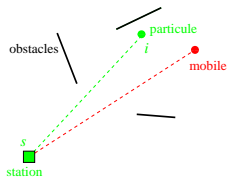
$(r^{s,1} \ r^{s,2})$  sont les coordonnées de la station  $s$

# filtre particulaire

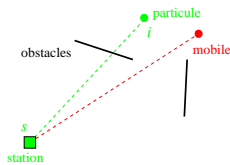
- ▶ initialisation  $\xi_0^i \leftarrow \bar{x}_0 + \sigma \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,1) \\ \mathcal{N}(0,1) \end{pmatrix}$  pour  $i = 1 : N$
- ▶ mutation  $\xi_{k-}^i \leftarrow \xi_{k-1}^i + \sigma_w \begin{pmatrix} \mathcal{N}(0,1) \\ \mathcal{N}(0,1) \end{pmatrix}$  pour  $i = 1 : N$

# filtre particulaire (suite)

- **vraisemblance** : à l'instant  $k$ , on calcule la vraisemblance  $\omega_k^{i,s}$  de la particule  $\xi_{k-}^i$  pour la station  $s$ 
  - cas 1 : la station voit le mobile



la station voit la particule

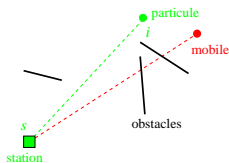


la station ne voit pas la particule

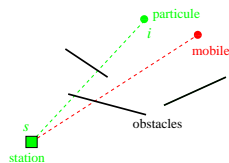
$$\omega_k^{i,s} = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_v} |y_k^s - h_s(\xi_{k-}^i)|^2\right) & \text{si } s \text{ voit la particule } \xi_{k-}^i \\ 0 & \text{si } s \text{ ne voit pas la particule } \xi_{k-}^i \end{cases}$$

# filtre particulaire (suite)

- cas 2 : la station ne voit pas le mobile



la station voit la particule



la station ne voit pas la particule

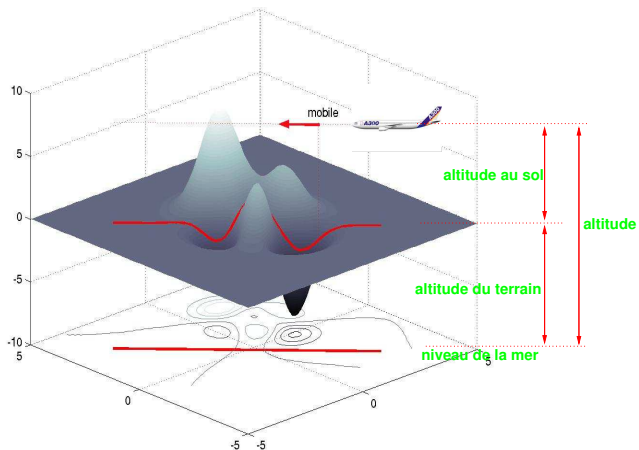
$$\omega_k^{i,s} = \begin{cases} 0 & \text{si } s \text{ voit la particule } \xi_k^i \\ 1 & \text{si } s \text{ ne voit pas la particule } \xi_k^i \end{cases}$$

- vraisemblance de la particule  $\xi_k^i$  à l'instant  $k$  :  $\omega_k^i = \prod_{s=1}^S \omega_k^{i,s}$

# plan

- 1 introduction
- 2 filtrage particulaire
  - modélisation
  - filtre
  - approximation
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - **exemple 2 : MNT**
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

# modèle numérique de terrain



## modélisation

- ▶ équation d'état : modèle à cap et vitesse constants (bruit)

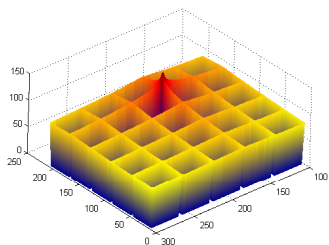
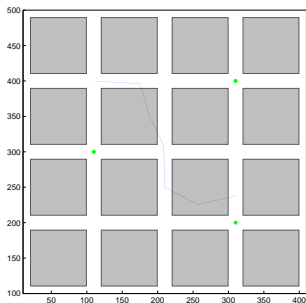
$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} r_k^1 \\ r_k^2 \\ v_k \\ c_k \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{coordonnée en } x_1 \\ \text{coordonnée en } x_2 \\ \text{vitesse} \\ \text{cap} \end{array} = \begin{pmatrix} r_{k-1}^1 \\ r_{k-1}^2 \\ v_{k-1} \\ c_{k-1} \end{pmatrix} + c\Delta t \begin{pmatrix} v_{k-1} \cos(c_{k-1}) \\ v_{k-1} \sin(c_{k-1}) \\ \sigma_v w_{k-1}^1 \\ \sigma_c w_{k-1}^2 \end{pmatrix}$$

- ▶ équation d'observation : utilisation de la carte numérique

$$y_k = h(\mathbf{x}_k) + \text{bruit d'observation}$$

où  $h(\mathbf{x}_k)$  est l'altitude du terrain à la position  $(r_k^1, r_k^2)$

## suivi d'un mobile dans Manhattan





# modélisation

- ▶ équation d'état : particule brownienne

$$\mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} r_k^1 \\ r_k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{k-1}^1 \\ r_{k-1}^2 \end{pmatrix} + \sigma_w \begin{pmatrix} w_{k-1}^1 \\ w_{k-1}^2 \end{pmatrix}$$

- ▶ équation d'observation : utilisation des cartes numériques d'atténuation

$$y_k^s = h_s(\mathbf{x}_k) + \text{bruit d'observation}$$

où  $h_s(\mathbf{x}_k)$  est l'atténuation de la station  $s$  à la position  $\mathbf{x}_k$

# plan

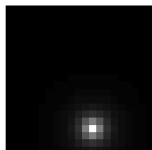
- 1 introduction
- 2 filtrage particulaire
  - modélisation
  - filtre
  - approximation
  - implémentation
- 3 exemples
  - exemple 1 : poursuite avec occultation
  - exemple 2 : MNT
  - exemple 3 : poursuite dans une séquence d'images

# modélisation

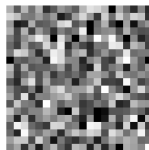
- ▶ observations : séquence d'images  $y_1 y_2 \cdots y_K$ , chaque image se décompose en

$$y_k(s) = I_{r_k}(s) + c^{(\text{bruit})} N(0, 1)$$

où  $s \in \mathcal{S}$  est l'indice de pixel



$I_{r_k}(s)$



*bruit*

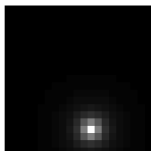
- ▶  $r_k = (r_k^1, r_k^2) \in \mathbb{R}^2$  position (inconnue) d'un mobile dans le plan

## modélisation (suite)

- ▶ PSF (point spread function)

$$l_r(s) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\delta^2 c}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(s^1 \delta - r^1)^2}{2\sigma^2} - \frac{(s^2 \delta - r^2)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbf{1}_{|s^1 \delta - r^1| < 3} \mathbf{1}_{|s^2 \delta - r^2| < 3}$$

où  $s = (s^1, s^2) \in \mathcal{S}$ ,  $r = (r^1, r^2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\delta$  taille du pixel



## modélisation (suite)

- ▶ fonction de vraisemblance  $\mathbb{P}(y_k \in dy | x_k = x) = g_k(x, y) dy$  où

$$g_k(x, y) \propto \exp \left\{ - \frac{1}{2 C(\text{bruit})} \sum_{s \in \mathcal{S}} [l_r(s) - y(s)]^2 \right\}$$

(on dispose d'une expression plus simple à calculer)

## équation d'état

- ▶  $x_k = x(t_k)$  avec  $x(t) = (r^1(t), v^1(t), a^1(t), r^2(t), v^2(t), a^2(t))$   
avec

$$d \begin{pmatrix} r^j(t) \\ v^j(t) \\ a^j(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^j(t) \\ v^j(t) \\ a^j(t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dW^j(t)$$

- ▶  $M_k(x, dx') = \mathbb{P}(x(t_k) \in dx' | x(t_{k-1}) = x)$
- ▶ seul  $(r_k^1, r_k^2)$  est utilisé dans l'observation

# rao-blackwellisation

- ▶  $\mathbf{x}_k = (\mathbf{a}_k, \mathbf{v}_k, r_k)$  seul  $r_k$  apparaît dans l'observation
- ▶ loi  $(\mathbf{a}_k, \mathbf{v}_k | r_k)$  est gaussienne
- ▶ technique hybride
  - $r_k$  est traité comme particule
  - $(\mathbf{a}_k, \mathbf{v}_k)$  est traité par filtre de Kalman
- ▶ c'est plus lourd mais plus précis

fin