Variété des représentations, étude locale

Guérin Clément

November 21, 2014

Table of contents

Les données

On pose Γ un groupe de type fini :

$$\Gamma := < x_1, ..., x_r | R_s(x_1, ..., x_r) = 1, \forall s \in S >$$

Les données

On pose Γ un groupe de type fini :

$$\Gamma := < x_1, ..., x_r | R_s(x_1, ..., x_r) = 1, \ \forall s \in S >$$

On pose G un sous-groupe fermé de GL_n.

Les données

On pose Γ un groupe de type fini :

$$\Gamma :=< x_1, ..., x_r | R_s(x_1, ..., x_r) = 1, \ \forall s \in S >$$

On pose G un sous-groupe fermé de GL_n.
On définit alors les représentations de Γ dans $G(\mathbb{C})$ par :

$$Hom(\Gamma, G(\mathbb{C})) := \{\rho : \Gamma \to G(\mathbb{C}) \text{ morphismes de groupes } \}$$

Géométries de $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ [1]

Il existe naturellement une topologie sur $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$. Cette topologie est la topologie compact-ouvert (Γ avec la topologie discrète et $G(\mathbb{C})$ la topologie usuelle). Vu que Γ est de type fini, en terme de convergence cela donne :

$$\rho_n \to \rho \Leftrightarrow [\forall i \in \{1, ..., r\} \text{ on a } \rho_n(x_i) \to \rho(x_i)]$$

Géométries de $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ [2]

D'un autre côté, on peut s'intéresser aux équations régissant $Hom(\Gamma, G)$. En effet si l'on note $\mathbb{F}_r$ le groupe libre à r éléments :

$$Hom(\mathbb{F}_r, G(\mathbb{C})) = G^r$$

$$\rho \mapsto (\rho(X_1), ..., \rho(X_r))$$

Ainsi, en passant à l'anneau des fonctions,

$$\mathbb{C}[Hom(\mathbb{F}_r, G)] = \mathbb{C}[G] \otimes ... \otimes \mathbb{C}[G]$$

Géométries de $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ [3]

Pour retrouver $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ on remarque :

$$Hom(\Gamma, G(\mathbb{C})) = \{\rho \in Hom(\mathbb{F}_r, G(\mathbb{C})) | R_s(\rho(X_1), ..., \rho(X_r)) = 1 \forall s \in S\}$$

Et pour tout $s \in S$, $R_s(\rho(X_1), ..., \rho(X_r)) = 1$ est une équation polynomiale dans G^r.

Géométries de $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ [3]

Pour retrouver $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ on remarque :

$$Hom(\Gamma, G(\mathbb{C})) = \{\rho \in Hom(\mathbb{F}_r, G(\mathbb{C})) | R_s(\rho(X_1), ..., \rho(X_r)) = 1 \forall s \in S\}$$

Et pour tout $s \in S$, $R_s(\rho(X_1), ..., \rho(X_r)) = 1$ est une équation polynomiale dans G^r.
Ainsi, il est possible de donner à $Hom(\Gamma, G)$ un sens, car c'est le sous ensemble fermé des $(A_1, ..., A_r) \in G^r$ vérifiant $R_s(A_1, ..., A_r) = 1$ dans G. L'anneau de fonctions associé :

$$(\mathbb{C}[G] \otimes ... \otimes \mathbb{C}[G]) / < R_s(A_1, ..., A_r) >$$

La $\mathbb{C}$-algèbre associée à $Hom(\mathbb{Z}^2, SL_2(\mathbb{C}))$ est :

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, ..., x_8]}{\mathcal{I}}$$

La $\mathbb{C}$-algèbre associée à $Hom(\mathbb{Z}^2, SL_2(\mathbb{C}))$ est :

$$\frac{\mathbb{C}[x_1, ..., x_8]}{\mathcal{I}}$$

Avec $\mathcal{I}$ engendré par les cinq polynômes suivants :

$$x_1x_4 - x_2x_3 - 1,\ x_5x_8 - x_6x_7 - 1,\ x_2x_7 - x_3x_6$$

$$x_7x_1 + x_8x_3 - x_3x_5 - x_4x_7,\ x_5x_2 + x_6x_4 - x_1x_6 - x_2x_8$$

Géométries de $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ [4]

On peut montrer que cette structure algébrique est la seule naturelle. Vu comme fermé de $G(\mathbb{C})^r$, $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ permet alors d'avoir deux points de vue algébrique ou variété différentielle. Il y a également deux topologies naturelles.

exemples

- $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $G = SL_n$, dans ce cas $Hom(\Gamma, SL_n) = SL_n$.

exemples

- $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $G = SL_n$, dans ce cas $Hom(\Gamma, SL_n) = SL_n$.

- $\Gamma = \pi^1(S_\sigma)$ où S_σ est une surface de Riemann fermée de genre σ et $G = SL_2$ alors une composante connexe de $Hom(\pi^1(S_\sigma), SL_2(\mathbb{R}))$ donne l'espace de Teichmuller de S_σ.

exemples

- $\Gamma = \mathbb{Z}$ et $G = SL_n$, dans ce cas $Hom(\Gamma, SL_n) = SL_n$.
- $\Gamma = \pi^1(S_\sigma)$ où S_σ est une surface de Riemann fermée de genre σ et $G = SL_2$ alors une composante connexe de $Hom(\pi^1(S_\sigma), SL_2(\mathbb{R}))$ donne l'espace de Teichmuller de S_σ.
- $\Gamma = T_{2,3,7}$ et G un groupe de Lie quelconque, alors $Hom(T_{2,3,7}, G(\mathbb{C})) = \{(A, B, C) \in G(\mathbb{C}) | A^2 = B^3 = C^7 = I$ et $ABC = I\}$, on retrouve alors le problème de Deligne-Simpson.

Conjugaison

Le groupe de Lie G agit par conjugaison sur les représentations :

$$g.\rho := [x \mapsto g\rho(x)g^{-1}]$$

Conjugaison

Le groupe de Lie G agit par conjugaison sur les représentations :

$$g.\rho := [x \mapsto g\rho(x)g^{-1}]$$

On peut alors s'intéresser à $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))/G(\mathbb{C})$. Cet espace topologique n'est pas Haussdorff. Pour avoir un bon objet géométrique, il faut supposer que G est un groupe de Lie réductif. Dans ce cas on a un bon quotient :

$$\chi(\Gamma, G) := Hom(\Gamma, G)//G \text{ la variété des caractères}$$

Conjugaison

Le groupe de Lie G agit par conjugaison sur les représentations :

$$g.\rho := [x \mapsto g\rho(x)g^{-1}]$$

On peut alors s'intéresser à $Hom(\Gamma, G(\mathbb{C}))/G(\mathbb{C})$. Cet espace topologique n'est pas Haussdorff. Pour avoir un bon objet géométrique, il faut supposer que G est un groupe de Lie réductif. Dans ce cas on a un bon quotient :

$$\chi(\Gamma, G) := Hom(\Gamma, G)//G \text{ la variété des caractères}$$

Dont l'anneau des fonctions est : $(\mathbb{C}[Hom(\Gamma, G)])^G$. Dans ce cas, $\chi(\Gamma, G)(\mathbb{C})$ donne les orbites des représentations semi-simples. Dans la suite, on notera $R(\Gamma, G)$ la variété des représentations (points complexes) et $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ le schéma associé (i.e. non-nécessairement réduit).

Espaces tangents pour $R(\Gamma, G)$ [1.1]

Chercher une description de l'espace tangent. Prenons $\rho \in R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$. Prenons ρ_t une courbe dans $R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ passant par ρ ($\rho_0 = \rho$). Alors :

$$f_t := \rho_t \rho^{-1}$$

Espaces tangents pour $R(\Gamma, G)$ [1.1]

Chercher une description de l'espace tangent. Prenons $\rho \in R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$. Prenons ρ_t une courbe dans $R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ passant par ρ ($\rho_0 = \rho$). Alors :

$$f_t := \rho_t \rho^{-1}$$

On sait que $f_0 = 1$ et que $f_t : \Gamma \to G(\mathbb{C})$. Cherchant une approximation à l'ordre 1, on prend $u : \Gamma \to \mathfrak{g}$:

$$f_t(.) = e^{tu(.)}$$

Espaces tangents pour $R(\Gamma, G)$ [1.1]

Chercher une description de l'espace tangent. Prenons $\rho \in R(\Gamma, G(\mathbb{C})$. Prenons ρ_t une courbe dans $R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ passant par ρ ($\rho_0 = \rho$). Alors :

$$f_t := \rho_t \rho^{-1}$$

On sait que $f_0 = 1$ et que $f_t : \Gamma \to G(\mathbb{C})$. Cherchant une approximation à l'ordre 1, on prend $u : \Gamma \to \mathfrak{g}$:

$$f_t(.) = e^{tu(.)}$$

Dans ce cas $\rho_t(.) := f_t(.)\rho(.)$ est un morphisme de groupes si et seulement si :

$$f_t(\gamma_1\gamma_2)\rho(\gamma_1\gamma_2) = f_t(\gamma_1)\rho(\gamma_1)f_t(\gamma_2)\rho(\gamma_2)$$

Espaces tangents pour $R(\Gamma, G)$ [1.2]

$$f_t(\gamma_1\gamma_2)\rho(\gamma_1\gamma_2) = f_t(\gamma_1)\rho(\gamma_1)f_t(\gamma_2)\rho(\gamma_1)^{-1}\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$$

Espaces tangents pour $R(\Gamma, G)$ [1.2]

$$f_t(\gamma_1\gamma_2)\rho(\gamma_1\gamma_2) = f_t(\gamma_1)\rho(\gamma_1)f_t(\gamma_2)\rho(\gamma_1)^{-1}\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$$

$$f_t(\gamma_1\gamma_2) = f_t(\gamma_1)\rho(\gamma_1)f_t(\gamma_2)\rho(\gamma_1)^{-1}$$

Espaces tangents pour $R(\Gamma, G)$ [1.2]

$$f_t(\gamma_1\gamma_2)\rho(\gamma_1\gamma_2) = f_t(\gamma_1)\rho(\gamma_1)f_t(\gamma_2)\rho(\gamma_1)^{-1}\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$$

$$f_t(\gamma_1\gamma_2) = f_t(\gamma_1)\rho(\gamma_1)f_t(\gamma_2)\rho(\gamma_1)^{-1}$$

On dérive par rapport à t puis on évalue en 0, on obtient alors :

$$u(\gamma_1\gamma_2) = u(\gamma_1) + [Ad \circ \rho(\gamma_1)](u(\gamma_2))$$

Espaces tangents pour $R(\Gamma, G)$ [1.2]

$$f_t(\gamma_1\gamma_2)\rho(\gamma_1\gamma_2) = f_t(\gamma_1)\rho(\gamma_1)f_t(\gamma_2)\rho(\gamma_1)^{-1}\rho(\gamma_1)\rho(\gamma_2)$$

$$f_t(\gamma_1\gamma_2) = f_t(\gamma_1)\rho(\gamma_1)f_t(\gamma_2)\rho(\gamma_1)^{-1}$$

On dérive par rapport à t puis on évalue en 0, on obtient alors :

$$u(\gamma_1\gamma_2) = u(\gamma_1) + [Ad \circ \rho(\gamma_1)](u(\gamma_2))$$

Conclusion :

$$u \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Espaces tangents pour $\mathcal{R}(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ [2.1]

Autre point de vue. On note $A_n := \mathbb{C}[t]/t^{n+1}$. On a une application q_i^j pour $j \geq i$:

$$q_i^j : \mathcal{R}(\Gamma, G(A_j)) \to \mathcal{R}(\Gamma, G(A_i))$$

De plus, on a l'action de $G(A_i)$ sur $\mathfrak{g}$ qui est donnée par $Ad \circ q_0^i$:

$$1 \to \mathfrak{g} \to G(A_{i+1}) \to G(A_i) \to 1$$

Espaces tangents pour $\mathcal{R}(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ [2.1]

Autre point de vue. On note $A_n := \mathbb{C}[t]/t^{n+1}$. On a une application q_i^j pour $j \geq i$:

$$q_i^j : \mathcal{R}(\Gamma, G(A_j)) \to \mathcal{R}(\Gamma, G(A_i))$$

De plus, on a l'action de $G(A_i)$ sur $\mathfrak{g}$ qui est donnée par $Ad \circ q_0^i$:

$$1 \to \mathfrak{g} \to G(A_{i+1}) \to G(A_i) \to 1$$

En particulier on sait que :

$$T_\rho^{Zar}\mathcal{R}(\Gamma, G) = (q_0^1)^{-1}(\{\rho\})$$

Espaces tangents pour $\mathcal{R}(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ [2.2]

Prenons $\underline{\rho} \in \mathcal{R}(\Gamma, G(A_1))$ alors :

$$\underline{\rho}(.) = (u(.), \rho(.))$$

Espaces tangents pour $\mathcal{R}(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ [2.2]

Prenons $\underline{\rho} \in \mathcal{R}(\Gamma, G(A_1))$ alors :

$$\underline{\rho}(.) = (u(.), \rho(.))$$

Avec u fonction de Γ dans $\mathfrak{g}$, la condition pour que $\underline{\rho}(.)$ soit un morphisme de groupes est exactement :

$$u \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$$

Prenons $\underline{\rho} \in \mathcal{R}(\Gamma, G(A_1))$ alors :

$$\underline{\rho}(.) = (u(.), \rho(.))$$

Avec u fonction de Γ dans $\mathfrak{g}$, la condition pour que $\underline{\rho}(.)$ soit un morphisme de groupes est exactement :

$$u \in Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$$

$$Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) = T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G)$$

Les co-bords

Une 1-cochaine (de Γ dans $\mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}$) u est un co-bord si et seulement s'il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que :

$$u(\gamma) = X - \gamma.X$$

Les co-bords

Une 1-cochaine (de Γ dans $\mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}$) u est un co-bord si et seulement s'il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que :

$$u(\gamma) = X - \gamma.X$$

Prenons ρ une représentation, on considère, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $f_X := (X, 1)(0, \rho(.))(-X, 1)$ alors $f_X = (X - Ad \circ \rho(.)(X), \rho(.))$ et donc f_x correspond à un co-bord.

Les co-bords

Une 1-cochaine (de Γ dans $\mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}$) u est un co-bord si et seulement s'il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que :

$$u(\gamma) = X - \gamma.X$$

Prenons ρ une représentation, on considère, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $f_X := (X,1)(0,\rho(.))(-X,1)$ alors $f_X = (X - Ad\circ\rho(.)(X), \rho(.))$ et donc f_x correspond à un co-bord.

Ceci correspond alors à la dérivée en 0 de l'application $f_t := [\gamma \mapsto exp(tX)\rho(\gamma)exp(-tX)]$.

Les co-bords

Une 1-cochaine (de Γ dans $\mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}$) u est un co-bord si et seulement s'il existe $X \in \mathfrak{g}$ tel que :

$$u(\gamma) = X - \gamma.X$$

Prenons ρ une représentation, on considère, pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $f_X := (X, 1)(0, \rho(.))(-X, 1)$ alors $f_X = (X - Ad \circ \rho(.)(X), \rho(.))$ et donc f_x correspond à un co-bord.

Ceci correspond alors à la dérivée en 0 de l'application $f_t := [\gamma \mapsto exp(tX)\rho(\gamma)exp(-tX)]$.

$$T_\rho G.\rho = B^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Autres espaces infinitésimaux

On a vu $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = T_\rho^{Zar}\mathcal{R}(\Gamma, G)$. On a :

$$T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \subseteq T_\rho^{Zar}\mathcal{R}(\Gamma, G)$$

Autres espaces infinitésimaux

On a vu $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = T_\rho^{Zar}\mathcal{R}(\Gamma, G)$. On a :

$$T_\rho^{Zar}R(\Gamma, G) \subseteq T_\rho^{Zar}\mathcal{R}(\Gamma, G)$$

Maintenant si l'on regarde : $\mathcal{R}(\Gamma, G(\mathbb{C}[[t]]))$ alors on note $C_\rho := q_1^\infty((q_0^\infty)^{-1}(\rho))$ le cône tangent en ρ.

$$B^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) \subseteq C_\rho \subseteq T_\rho^{Zar}R(\Gamma, G) \subseteq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

On notera :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})/B^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Espace tangent à la variété des caractères.

On a vu que : B^1 est l'espace tangent à une orbite et Z^1 est à la variété. Pour autant H^1 n'est pas forcément l'espace tangent à la variété quotient.

Espace tangent à la variété des caractères.

On a vu que : B^1 est l'espace tangent à une orbite et Z^1 est à la variété. Pour autant H^1 n'est pas forcément l'espace tangent à la variété quotient.

Weil a montré que si $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = 0$ alors ρ est localement rigide (i.e. admet un voisinage constitué de ses conjugués). Pour autant la réciproque n'est pas vraie.

Construction d'un contre-exemple [1]

Prenons Γ un groupe de type fini tel qu'il existe Δ d'indice fini dans Γ isomorphe à $\mathbb{Z}^r$ ($r \geq 2$) et :

$$1 \to \Delta \to \Gamma \to Q \to 1$$

On suppose de plus que Γ agit irréductiblement sur $\mathbb{C} \otimes \Delta$.

Construction d'un contre-exemple [1]

Prenons Γ un groupe de type fini tel qu'il existe Δ d'indice fini dans Γ isomorphe à $\mathbb{Z}^r$ ($r \geq 2$) et :

$$1 \to \Delta \to \Gamma \to Q \to 1$$

On suppose de plus que Γ agit irréductiblement sur $\mathbb{C} \otimes \Delta$.

On peut montrer que si $\rho \in R(\Gamma, GL_2(\mathbb{C}))$ alors $\rho(\Gamma)$ est fini.

Construction d'un contre-exemple [2]

On peut alors affirmer qu'il existe $K \triangleleft \Gamma$ d'indice fini tel que pour tout $\rho \in R(\Gamma, GL_2(\mathbb{C}))$, $\rho(K) = I_2$.

Construction d'un contre-exemple [2]

On peut alors affirmer qu'il existe $K \triangleleft \Gamma$ d'indice fini tel que pour tout $\rho \in R(\Gamma, GL_2(\mathbb{C}))$, $\rho(K) = I_2$.

$$R(\Gamma, GL_2(\mathbb{C})) = R(\Gamma/K, GL_2(\mathbb{C})) \text{ P.U. du quotient}$$

Construction d'un contre-exemple [2]

On peut alors affirmer qu'il existe $K \triangleleft \Gamma$ d'indice fini tel que pour tout $\rho \in R(\Gamma, GL_2(\mathbb{C}))$, $\rho(K) = I_2$.

$$R(\Gamma, GL_2(\mathbb{C})) = R(\Gamma/K, GL_2(\mathbb{C})) \text{ P.U. du quotient}$$

Par la théorie des représentations des groupes finis $R(\Gamma/K, GL_2(\mathbb{C}))$ est localement rigide (en toute représentation).

Construction d'un contre-exemple [3]

Prenons $\rho \in R(\Gamma, GL_2(\mathbb{C}))$ et $N := Ker(\rho) \cap \Delta$. Alors on a :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes \Delta, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$$

Construction d'un contre-exemple [3]

Prenons $\rho \in R(\Gamma, GL_2(\mathbb{C}))$ et $N := Ker(\rho) \cap \Delta$. Alors on a :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes \Delta, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^1(\Gamma/N, \mathfrak{g}^N) \xrightarrow{Inf} H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \xrightarrow{Res} H^1(N, \mathfrak{g})^{\Gamma/N} \xrightarrow{Tr} H^2(\Gamma/N, \mathfrak{g}^N)$$

Prenons $\rho \in R(\Gamma, GL_2(\mathbb{C}))$ et $N := Ker(\rho) \cap \Delta$. Alors on a :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes \Delta, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$0 \longrightarrow H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \xrightarrow{Res} H^1(N, \mathfrak{g})^{\Gamma/N} \longrightarrow 0$$

Construction d'un contre-exemple [4]

Ainsi :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = H^1(N, \mathfrak{g})^{\Gamma/N}$$

Construction d'un contre-exemple [4]

Ainsi :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = H^1(N, \mathfrak{g})^{\Gamma/N}$$

Comme N agit trivialement sur $\mathfrak{g}$:

$$H^1(N, \mathfrak{g})^{\Gamma/N} = Hom(N, \mathfrak{g})^{\Gamma/N} = Hom_\Gamma(N, \mathfrak{g})$$

Ainsi :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = H^1(N, \mathfrak{g})^{\Gamma/N}$$

Comme N agit trivialement sur $\mathfrak{g}$:

$$H^1(N, \mathfrak{g})^{\Gamma/N} = Hom(N, \mathfrak{g})^{\Gamma/N} = Hom_\Gamma(N, \mathfrak{g})$$

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = Hom_\Gamma(N, \mathfrak{g})$$

Ainsi :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes N, \mathfrak{g})$$

Ainsi :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes N, \mathfrak{g})$$

Avec :

$$\mathbb{C} \otimes N = \mathbb{C} \otimes \Delta$$

Construction d'un contre-exemple [5]

Ainsi :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes N, \mathfrak{g})$$

Avec :

$$\mathbb{C} \otimes N = \mathbb{C} \otimes \Delta$$

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes \Delta, \mathfrak{g})$$

Ainsi :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes N, \mathfrak{g})$$

Avec :

$$\mathbb{C} \otimes N = \mathbb{C} \otimes \Delta$$

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes \Delta, \mathfrak{g})$$

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes \Delta, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Construction d'un contre-exemple [6]

Pour trouver un contre-exemple, il suffit de trouver une représentation telle que $\mathbb{C} \otimes \Delta$ est inclus dans $\mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}$.

Le contre-exemple que nous allons donner est :

$$1 \to \mathbb{Z}^2 \to \Gamma \to \mathfrak{S}_3 \to 1$$

Avec $\mathfrak{S}_3 \to GL_2(\mathbb{Z})$ induisant une représentation irréductible ρ_2 (unique cf table) et Γ produit semi-direct.

$$\Gamma = \mathbb{Z}^2 \rtimes_{\rho_2} \mathfrak{S}_3$$

Table des caractères $\mathfrak{S}_3$

	Id	(1,2,3)	(1,2)
χ_0	1	1	1
χ_1	1	1	-1
χ_2	2	-1	0

Table: $\mathfrak{S}_3$

Construction d'un contre-exemple [7]

On prend alors $\rho \in R(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\rho_2} \mathfrak{S}_3, GL_2(\mathbb{C}))$ via :

$$\rho(\Delta) = I_2 \text{ et } \rho_{|\mathfrak{S}_3} = \rho_2$$

Construction d'un contre-exemple [7]

On prend alors $\rho \in R(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\rho_2} \mathfrak{S}_3, GL_2(\mathbb{C}))$ via :

$$\rho(\Delta) = I_2 \text{ et } \rho_{|\mathfrak{S}_3} = \rho_2$$

Dans ce cas : $\mathfrak{g}_{Ad \circ \rho} = V(\rho_2)^* \otimes V(\rho_2)$. Ainsi :

$$\chi_{\mathfrak{g}} = \chi_2^2 = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2$$

Construction d'un contre-exemple [7]

On prend alors $\rho \in R(\mathbb{Z}^2 \rtimes_{\rho_2} \mathfrak{S}_3, GL_2(\mathbb{C}))$ via :

$$\rho(\Delta) = I_2 \text{ et } \rho_{|\mathfrak{S}_3} = \rho_2$$

Dans ce cas : $\mathfrak{g}_{Ad\circ\rho} = V(\rho_2)^* \otimes V(\rho_2)$. Ainsi :

$$\chi_{\mathfrak{g}} = \chi_2^2 = \chi_0 + \chi_1 + \chi_2$$

En particulier $\mathbb{C} \otimes \Delta = V(\rho_2) \subseteq \mathfrak{g}$ et donc $Hom_\Gamma(\mathbb{C} \otimes \Delta, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) \neq 0$. Par suite :

$$H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) \neq 0$$

Le théorème de Weil

Soit $\rho \in R(\Gamma, G)$ alors $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) = 0$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont réunies :

- L'orbite $G.\rho$ est ouverte au voisinage de ρ.
- La variété $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ est réduite dans un voisinage de ρ.
- ρ est un point non-singulier de $R(\Gamma, G)$ et $\mathcal{R}(\Gamma, G)$.

Le théorème de Weil

Soit $\rho \in R(\Gamma, G)$ alors $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = 0$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont réunies :

- L'orbite $G.\rho$ est ouverte au voisinage de ρ.
- La variété $\mathcal{R}(\Gamma, G)$ est réduite dans un voisinage de ρ.
- ρ est un point non-singulier de $R(\Gamma, G)$ et $\mathcal{R}(\Gamma, G)$.

Dans l'exemple ci-dessus c'est la condition 2 qui ne tenait pas. Autrement dit on avait :

$$T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \neq T_\rho^{Zar} \mathcal{R}(\Gamma, G)$$

Une remarque

On a vu que :

$$C_\rho \subseteq T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \subseteq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Une remarque

On a vu que :

$$C_\rho \subseteq T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \subseteq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Le fait d'avoir $T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \neq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$ correspond à un problème de réduction. D'un autre côté le fait d'avoir $C_\rho \neq T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G)$ correspond au fait que ρ est localement la réunion de plusieurs composantes irréductibles.

Une remarque

On a vu que :

$$C_\rho \subseteq T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \subseteq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$$

Le fait d'avoir $T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \neq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ correspond à un problème de réduction. D'un autre côté le fait d'avoir $C_\rho \neq T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G)$ correspond au fait que ρ est localement la réunion de plusieurs composantes irréductibles.

Si l'on peut assurer que $C_\rho = Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ alors on aura un point lisse de la variété.

Une remarque

On a vu que :

$$C_\rho \subseteq T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \subseteq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$$

Le fait d'avoir $T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G) \neq Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ correspond à un problème de réduction. D'un autre côté le fait d'avoir $C_\rho \neq T_\rho^{Zar} R(\Gamma, G)$ correspond au fait que ρ est localement la réunion de plusieurs composantes irréductibles.

Si l'on peut assurer que $C_\rho = Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ alors on aura un point lisse de la variété.

Un élément de $R(\Gamma, G(\mathbb{C}[[t]]))$ est une courbe "formelle". Par le théorème d'approximation d'Artin, si l'on a une telle courbe formelle alors on peut trouver une courbe analytique qui est localement "proche" de cette courbe formelle.

Un théorème de Goldman

Soit Λ_σ le groupe fondamental d'une surface de Riemann de genre σ et G un groupe de Lie réductif.

Un théorème de Goldman

Soit Λ_σ le groupe fondamental d'une surface de Riemann de genre σ et G un groupe de Lie réductif.

Si $\rho \in R(\Lambda_\sigma, G(\mathbb{C}))$ est semi-simple alors, localement, la variété (i.e. le germe analytique $(R(\Lambda_\sigma, G), \rho))$ est donnée par des équations quadratiques (est isomorphe au germe de $(Q^{-1}(0), 0)$ où $Q(v) = A(v, v)$ avec $A : V \times V \to W$ est une forme bilinéaire).

Quelle est l'équation quadratique ?

Reprenons le calcul pour l'espace tangent mais avec une composante supplémentaire. Si $\rho \in R(\Lambda_\sigma, G(\mathbb{C}))$ et l'on considére une variation :

$$\rho_t(.) = exp(u(.)t + v(.)t^2)\rho(.)$$

Quelle est l'équation quadratique ?

Reprenons le calcul pour l'espace tangent mais avec une composante supplémentaire. Si $\rho \in R(\Lambda_\sigma, G(\mathbb{C}))$ et l'on considére une variation :

$$\rho_t(.) = exp(u(.)t + v(.)t^2)\rho(.)$$

La seule chose à vérifier est que ρ_t soit un morphisme de groupes (du point de vue géométrie algébrique, on cherche des équations pour $(q_0^2)^{-1}(\rho)$).

Quelle est l'équation quadratique ?

Reprenons le calcul pour l'espace tangent mais avec une composante supplémentaire. Si $\rho \in R(\Lambda_\sigma, G(\mathbb{C}))$ et l'on considére une variation :

$$\rho_t(.) = exp(u(.)t + v(.)t^2)\rho(.)$$

La seule chose à vérifier est que ρ_t soit un morphisme de groupes (du point de vue géométrie algébrique, on cherche des équations pour $(q_0^2)^{-1}(\rho)$).

$$\rho_t(\gamma_1\gamma_2) = \rho_t(\gamma_1)\rho_t(\gamma_2)$$

Quelle est l'équation quadratique ?

$$\rho_t(\gamma_1\gamma_2) = \rho_t(\gamma_1)\rho_t(\gamma_2)$$

$$\rho_t(\gamma_1\gamma_2) = e^{u(\gamma_1)t+v(\gamma_1)t^2}e^{Ad\circ\rho(\gamma_1)(u(\gamma_2))t+Ad\circ\rho(\gamma_1)(v(\gamma_2))t^2}\rho(\gamma_1\gamma_2)$$

Puis on utilise la formule de Campbell-Hausdorff pour le produit d'exponentielles.

Quelle est l'équation quadratique ?

$$u(\gamma_1\gamma_2)t + v(\gamma_1\gamma_2)t^2$$

$$=$$

$$(u(\gamma_1) + Ad \circ \rho(\gamma_1)(u(\gamma_2)))t$$

$$+$$

$$(v(\gamma_1) + Ad \circ \rho(\gamma_1)(v(\gamma_2)) + [u(\gamma_1), Ad \circ \rho(\gamma_1)(u(\gamma_2))])t^2$$

$$+o(t^2)$$

Quelle est l'équation quadratique ?

On retire deux informations :

- u est un 1-cocycle.

Quelle est l'équation quadratique ?

On retire deux informations :

- u est un 1-cocycle.
- $[u(\gamma_1), Ad\circ\rho(\gamma_1)(u(\gamma_2))] = v(\gamma_1\gamma_2) - v(\gamma_1) - Ad\circ\rho(\gamma_1)(v(\gamma_2))$

$$\text{i.e. } [u(\gamma_1), Ad\circ\rho(\gamma_1)(u(\gamma_2))] = -\delta(v)(\gamma_1,\gamma_2)$$

$$(\gamma_1,\gamma_2) \mapsto [u(\gamma_1), Ad\circ\rho(\gamma_1)(u(\gamma_2))] = 0 \text{ dans } H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Quelle est l'équation quadratique ?

On a donc $Q(.) = A(.,.)$ avec

$$A : Z^1(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) \times Z^1(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) \to H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

$$(u_1, u_2) \mapsto [(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto [u_1(\gamma_1), Ad \circ \rho(\gamma_1)(u_2(\gamma_2))]]$$

Quelle est l'équation quadratique ?

On a donc $Q(.) = A(.,.)$ avec

$$A : Z^1(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) \times Z^1(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) \to H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

$$(u_1, u_2) \mapsto [(\gamma_1, \gamma_2) \mapsto [u_1(\gamma_1), Ad \circ \rho(\gamma_1)(u_2(\gamma_2))]]$$

$$B : H^1(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) \times H^1(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) \to H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$$

Tout ceci reste vrai si l'on remplace Λ_σ par Γ groupe de type fini.

Ce qu'a montré Goldman

Dans ce cas particulier, il a montré que si u vecteur tangent en ρ vérifiant $Q(u) = 0$ alors il existe $\rho_t \in R(\Lambda_\sigma, G(\mathbb{C}[[t]]))$ tel que :

$$q_1^\infty(\rho_t) = (u, \rho)$$

Ce qu'a montré Goldman

Dans ce cas particulier, il a montré que si u vecteur tangent en ρ vérifiant $Q(u) = 0$ alors il existe $\rho_t \in R(\Lambda_\sigma, G(\mathbb{C}[[t]]))$ tel que :

$$q_1^\infty(\rho_t) = (u, \rho)$$

Ceci donne une paramétrisation locale de la variété des représentations. Peut-on généraliser cela aux groupes triangulaires ?

Groupe triangulaire

Prenons
$\Gamma := T_{a,b,c} =< x, y, z | x^a = y^b = z^c = xyz = 1 >\subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ un groupe triangulaire (on doit avoir $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$).

Groupe triangulaire

Prenons
$\Gamma := T_{a,b,c} =< x, y, z | x^a = y^b = z^c = xyz = 1 >\subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ un groupe triangulaire (on doit avoir $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$).

Il existe $\Lambda < \Gamma$ sans torsion et d'indice fini (donc de type fini) par un lemme de Selberg. Quitte à faire un peu descendre l'indice, Λ est normal dans Γ.

Groupe triangulaire

Prenons
$\Gamma := T_{a,b,c} =< x, y, z | x^a = y^b = z^c = xyz = 1 >\subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ un groupe triangulaire (on doit avoir $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$).

Il existe $\Lambda < \Gamma$ sans torsion et d'indice fini (donc de type fini) par un lemme de Selberg. Quitte à faire un peu descendre l'indice, Λ est normal dans Γ.

Comme l'on est dans $PSL(2, \mathbb{R})$ (raisonnement géométrique), Λ ne peut contenir ni d'éléments paraboliques ni d'éléments elliptiques (ils sont forcément d'ordres finis car l'on est dans Γ).

Groupe triangulaire

Prenons
$\Gamma := T_{a,b,c} =< x, y, z | x^a = y^b = z^c = xyz = 1 >\subseteq PSL(2, \mathbb{R})$ un groupe triangulaire (on doit avoir $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < 1$).

Il existe $\Lambda < \Gamma$ sans torsion et d'indice fini (donc de type fini) par un lemme de Selberg. Quitte à faire un peu descendre l'indice, Λ est normal dans Γ.

Comme l'on est dans $PSL(2, \mathbb{R})$ (raisonnement géométrique), Λ ne peut contenir ni d'éléments paraboliques ni d'éléments elliptiques (ils sont forcément d'ordres finis car l'on est dans Γ).

Le sous-groupe Λ est de type fini, dans $PSL(2, \mathbb{R})$ constitué uniquement d'éléments hyperboliques, c'est donc un groupe de surface.

Généralisation

Prenons $\rho \in R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ semi-simple alors, par restriction, cela donne $\rho' \in R(\Lambda, G(\mathbb{C}))$ semi-simple.

Est-ce que l'équation $Q^{-1}(0)$ sur $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho})$ suffit pour retrouver le cône tangent ?

Généralisation

Prenons $\rho \in R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ semi-simple alors, par restriction, cela donne $\rho' \in R(\Lambda, G(\mathbb{C}))$ semi-simple.

Est-ce que l'équation $Q^{-1}(0)$ sur $Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$ suffit pour retrouver le cône tangent ?

Pour cela on va étudier l'action de Γ sur $\mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}$ via :

$$1 \to \Lambda \to \Gamma \to Q \to 1$$

On fait cela grâce à la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$H^1(Q, \mathfrak{g}^\Lambda) \xrightarrow{Inf} H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \xrightarrow{Res} H^1(\Lambda, \mathfrak{g})^Q \xrightarrow{Tr} H^2(Q, \mathfrak{g}^\Lambda)$$

$$H^2(Q, \mathfrak{g}^\Lambda) \xrightarrow{Inf} Ker(Res_{H^2(\Gamma, \mathfrak{g})}) \xrightarrow{L} H^1(Q, H^1(\Lambda, \mathfrak{g}))$$

Hochschild-Serre

On fait cela grâce à la suite spectrale de Hochschild-Serre :

$$0 \xrightarrow{Inf} H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) \xrightarrow{Res} H^1(\Lambda, \mathfrak{g})^Q \xrightarrow{Tr} 0$$

$$0 \xrightarrow{Inf} Ker\big(Res_{H^2(\Gamma,\mathfrak{g})}\big) \xrightarrow{L} 0$$

Conséquences

L'espace tangent (modulo les co-bords) : $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = H^1(\Lambda, \mathfrak{g})^Q$.

Au niveau du H^2 : $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}) \subseteq H^2(\Lambda, \mathfrak{g})$.

Conséquences

L'espace tangent (modulo les co-bords) : $H^1(\Gamma, \mathfrak{g}) = H^1(\Lambda, \mathfrak{g})^Q$.

Au niveau du H^2 : $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}) \subseteq H^2(\Lambda, \mathfrak{g})$.

Prenons donc ρ une représentation semi-simple dans $R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ et v tangent en ρ vérifiant $Q(v) = 0$.

En passant aux restrictions ρ' une représentation semi-simple dans $R(\Lambda, G(\mathbb{C}))$ et v' tangent en ρ' vérifiant $Q'(v') = 0$.

Ainsi il existe une représentation ρ'_t induisant (ρ', v').

Processus de remontée

Soit n un entier ($A_n := \mathbb{C}[t]/t^{n+1}$) on sait que :

$$1 \longrightarrow \mathfrak{g} \longrightarrow G(A_{n+1}) \longrightarrow G(A_n) \longrightarrow 1$$

Processus de remontée

On veut remonter ρ_t "petit à petit" :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & G(A_{n+1}) \arrow[r] & G(A_n) \arrow[r] & 1 \\ & & & \Gamma \arrow[u, "\rho_n"] \arrow[ul, dashed, "\rho_{n+1}"] & \end{tikzcd}$$

Fait : lemme sur les extensions

Supposons A, B, C formant une extension et A abélien, G et ψ donnés comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 1 \\
 & & & G \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ul, dashed, "\Psi"] &
\end{tikzcd}$$

Alors il existe Ψ si et seulement si $s_\psi \in H^2(G, A)$ est nul.

Processus de remontée

On sait que l'on peut toujours remonter au niveau de Λ :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & G(A_{n+1}) \arrow[r] & G(A_n) \arrow[r] & 1 \\ & & & \Lambda \arrow[u, "\rho'_n"] \arrow[ul, dashed, "\rho'_{n+1}"] & \end{tikzcd}$$

De plus on peut montrer que $Res(s_{\rho_n}) = s_{\rho'_n}$ en général.

Processus de remontée

On sait que l'on peut toujours remonter au niveau de Λ :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & G(A_{n+1}) \arrow[r] & G(A_n) \arrow[r] & 1 \\ & & & \Lambda \arrow[ul, dashed, "\rho'_{n+1}"] \arrow[u, "\rho'_n"'] & \end{tikzcd}$$

De plus on peut montrer que $Res(s_{\rho_n}) = s_{\rho'_n}$ en général.

L'action de Γ via ρ_n (resp. Λ via ρ'_n) sur $\mathfrak{g}$ est toujours donnée par $Ad \circ \rho$. De plus on sait que $s_{\rho'_n} = 0$ donc $Res(s_{\rho_n}) = 0$ et donc $s_{\rho_n} = 0$.

Processus de remontée

Pour tout n, il existe ρ_{n+1} tel que :

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathfrak{g} \arrow[r] & G(A_{n+1}) \arrow[r] & G(A_n) \arrow[r] & 1 \\
 & & & \Gamma \arrow[ul, "\rho_{n+1}"] \arrow[u, "\rho_n"'] &
\end{tikzcd}
$$

Conclusion

Ce processus permet de construire ρ_t tel que $q_1^\infty(\rho_t) = (v, \rho)$. On retrouve donc une courbe infinitésimale en ρ dont le vecteur tangent est v.

Conclusion

Ce processus permet de construire ρ_t tel que $q_1^\infty(\rho_t) = (v, \rho)$. On retrouve donc une courbe infinitésimale en ρ dont le vecteur tangent est v.

Cette généralisation se généralise directement aux groupes fuchsiens de type fini co-compact (i.e. engendré par des éléments elliptiques d'ordres finis et hyperboliques). Dans le cas où Γ groupe fuchsien de type fini de co-volume fini mais pas co-compact alors il contient un élément parabolique et dans ce cas la variété des représentations est plus simple.

Une question d'obstruction

Dans ce que l'on vient de faire, on a vu que pour trouver une représentation dans $G(A_{n+1})$ à partir d'une représentation dans $G(A_n)$, il fallait tester si un certain 2-cocycle était un co-bord (on parle d'obstruction).

Une question d'obstruction

Dans ce que l'on vient de faire, on a vu que pour trouver une représentation dans $G(A_{n+1})$ à partir d'une représentation dans $G(A_n)$, il fallait tester si un certain 2-cocycle était un co-bord (on parle d'obstruction).

En particulier, on obtient que si $\rho \in R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ est tel que $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad \circ \rho}) = 0$ alors tout vecteur tangent (formel) en ρ est un vrai vecteur tangent (car il n'y a aucune obstruction à la remontée).

Une question d'obstruction

Dans ce que l'on vient de faire, on a vu que pour trouver une représentation dans $G(A_{n+1})$ à partir d'une représentation dans $G(A_n)$, il fallait tester si un certain 2-cocycle était un co-bord (on parle d'obstruction).

En particulier, on obtient que si $\rho \in R(\Gamma, G(\mathbb{C}))$ est tel que $H^2(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = 0$ alors tout vecteur tangent (formel) en ρ est un vrai vecteur tangent (car il n'y a aucune obstruction à la remontée).

Dans ce cas $C_\rho = Z^1(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho})$ et donc la variété est lisse en ρ.

En résumé si $H^i(\Gamma, \mathfrak{g}_{Ad\circ\rho}) = 0$ pour $i = 1$ ou 2 alors la variété est lisse en ρ.

Une application

Supposons que $\Gamma = \Lambda_\sigma$ est un groupe de surface et que $\rho \in R(\Lambda_\sigma, SL_n(\mathbb{C}))$ est une représentation irréductible ($\rho(\Lambda_\sigma)$ ne fixe aucun sous-espace propre de $\mathbb{C}^n$) alors :

$$R(\Lambda_\sigma, SL_n(\mathbb{C}))\text{est lisse en } \rho.$$

Une application (démonstration)

Par la remarque précédente, il suffit de montrer que :

$$H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})_{Ad\circ\rho}) = 0$$

Une application (démonstration)

Par la remarque précédente, il suffit de montrer que :

$$H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})_{Ad\circ\rho}) = 0$$

Par dualité de Poincaré pour les groupes de surfaces :

$$H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})_{Ad\circ\rho}) = H^0(\Lambda_\sigma, \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})_{Ad\circ\rho})^*$$

Une application (démonstration)

Par la remarque précédente, il suffit de montrer que :

$$H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})_{Ad\circ\rho}) = 0$$

Par dualité de Poincaré pour les groupes de surfaces :

$$H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})_{Ad\circ\rho}) = H^0(\Lambda_\sigma, \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})_{Ad\circ\rho})^*$$

$$H^0(\Lambda_\sigma, \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})_{Ad\circ\rho}) = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\Lambda_\sigma}$$

Une application (démonstration)

Si l'on regarde :

$$H := exp(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\Lambda_\sigma}) \subseteq SL(n, \mathbb{C})$$

Alors pour tout $h \in H$, $\lambda \in \Lambda_\sigma$, on a :

$$\rho(\lambda)h = h\rho(\lambda)$$

Une application (démonstration)

Si l'on regarde :

$$H := exp(\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\Lambda_\sigma}) \subseteq SL(n, \mathbb{C})$$

Alors pour tout $h \in H$, $\lambda \in \Lambda_\sigma$, on a :

$$\rho(\lambda)h = h\rho(\lambda)$$

Par irréductibilité de ρ, $h = z \times I_n$ avec $z \in \mathbb{C}^*$, on obtient donc que $H \subseteq Z(SL_n(\mathbb{C}))$ qui est discret donc H est trivial (car connexe) et $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})^{\Lambda_\sigma} = \{0\}$. Par suite, on a bien :

$$H^2(\Lambda_\sigma, \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})_{Ad \circ \rho}) = 0$$

Contre-exemple

Si le groupe n'est plus un groupe de surface. Prenons, $\rho \in R(\Gamma, SL(2,\mathbb{C}))$ irréductible. On note $\rho_0 \in R(\mathbb{Z}^2, SL(2,\mathbb{C}))$ la représentation triviale.

Contre-exemple

Si le groupe n'est plus un groupe de surface. Prenons, $\rho \in R(\Gamma, SL(2,\mathbb{C}))$ irréductible. On note $\rho_0 \in R(\mathbb{Z}^2, SL(2,\mathbb{C}))$ la représentation triviale.

En calculant la jacobienne en ρ_0 qui est de rang 2, on voit que ρ_0 est singulier.

Contre-exemple

Si le groupe n'est plus un groupe de surface. Prenons, $\rho \in R(\Gamma, SL(2,\mathbb{C}))$ irréductible. On note $\rho_0 \in R(\mathbb{Z}^2, SL(2,\mathbb{C}))$ la représentation triviale.

En calculant la jacobienne en ρ_0 qui est de rang 2, on voit que ρ_0 est singulier.

La représentation $\rho * \rho_0 \in R(\Gamma * \mathbb{Z}^2, SL(2,\mathbb{C}))$ est irréductible mais comme :

$$R(\Gamma * \mathbb{Z}^2, SL(2,\mathbb{C})) = R(\Gamma, SL(2,\mathbb{C})) \times R(\mathbb{Z}^2, SL(2,\mathbb{C}))$$

Cela ne peut-être un point lisse.

Bibliographie

-William M. Goldman, Representations of fundamental groups of surfaces, Geometry and Topology, Proceedings, University of Maryland 1983-1984, Lecture notes in Mathematics, 1167, Springer-Verlag 1985, p. 95-117.

-William M. Goldman, John J. Millson The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kahler Manifolds, PM de l'IHES, tome 67 (1988), p. 43-96.

-A. Lubotzky, A. Magid, Varieties of representations of finitely generated groups, Memoirs of the American Mathematical Society, 336 (1985).

Bibliographie

-John J. Millson, Michael Kapovich, On representation varieties of 3-manifold groups,arXiv:1303.2347v1 [math.GT] (10 Mars 2013).