

Résumé

La théorie des groupes de tresses s'inscrit au croisement de plusieurs domaines des mathématiques, en particulier, l'algèbre et la géométrie. La recherche actuelle s'étend dans chacune de ces directions, et de riches développements naissent du mariage de ces deux aspects.

D'un point de vue géométrique, le groupe des tresses à n brins est vu comme le groupe modulaire d'un disque à n trous, avec composante de bord. On peut représenter une tresse par un *diagramme de courbes*, c'est-à-dire l'image d'une famille fixée d'arcs sur le disque, par l'élément correspondant du groupe modulaire. Dans cette thèse est présenté l'algorithme de *relaxations par la droite*, qui permet de retrouver, étant donné un diagramme de courbes, la tresse à partir de laquelle il a été obtenu. Cet algorithme aide à faire le lien entre des propriétés géométriques du diagramme de courbes, et des propriétés algébriques du mot de tresse, en permettant de repérer de grandes puissances d'un générateur sous forme de spirales dans le diagramme de courbes.

D'un point de vue algébrique, le groupe de tresses est l'exemple classique de groupe de Garside. L'un des objectifs actuels des recherches en théorie de Garside est d'obtenir un algorithme de résolution en temps polynomial du problème de conjugaison dans les groupes de tresses. À cette fin, on cherche à exploiter les propriétés de certains ensembles finis de conjugués d'une tresse, qui sont des invariants de conjugaison. L'un des résultats de cette thèse concerne la taille d'un de ces invariants, *l'ensemble super-sommital* : on exhibe une famille de tresses *pseudo-anosoviennes* dont l'ensemble super-sommital est de taille exponentielle. González-Meneses avait déjà établi le résultat similaire pour une famille de tresses *réductibles*. La conséquence de ces résultats est qu'on ne peut pas espérer résoudre le problème de conjugaison en temps polynomial au moyen de cet ensemble, et qu'il vaut mieux chercher à exploiter des invariants plus petits. Dans le cas des tresses pseudo-anosoviennes, des espoirs résident actuellement en *l'ensemble des circuits glissants*. Dans cette thèse, un algorithme en temps polynomial s'appuyant sur ce dernier ensemble résout *génériquement* le problème de conjugaison, c'est-à-dire qu'il le résout pour une proportion de tresses tendant exponentiellement vite vers 1 lorsque la longueur de la tresse tend vers l'infini. On montre également que, dans une boule du graphe de Cayley avec pour générateurs les *tresses simples*, une tresse générique est pseudo-anosovienne, ce qui était une conjecture bien connue des spécialistes de la théorie de Garside.