Sur le nombre de composantes des courbes algébriques planes.

Par Axel Harnack à Leipzig.

La question concernant le nombre maximum de circuits réels distincts qu'une courbe de degré n avec ou sans singularités peut avoir, n'a apparemment pas été soulevée jusqu'à présent ; en tout cas, pour autant que je connaisse la littérature sur le sujet, on ne trouve une réponse à cette question que dans des cas isolés. En suivant la classification des courbes d'après leur genre, il vient tout d'abord clairement la propriété que *toutes les courbes de genre :* $p = 0$ (appelées par Cayley courbes unicursales), dans le cas où elles sont réelles, ne possèdent qu'un circuit, étant entendu que les singularités (points multiples, respectivement tangentes multiples), quant elles se présentent isolément, ne comptent pas comme circuits. Cette propriété peut se démontrer sans difficulté à partir de la représentation rationelle et univoque d'une courbe en fonction d'un paramètre[1]. L'étude des courbes du troisième degré a depuis longtemps amené au résultat qu'il ne peut y avoir dans ce cas plus de deux circuits distincts ; ceci, grâce à la relation univoque qui a lieu entre courbes de même genre, ou, ce qui signifie la même chose dans ce cas, grâce à la représentabilité de toutes ces courbes au moyen de fonctions elliptiques, peut être facilement généralisé en le résultat que *toutes les courbes de genre :* $p = 1$ possèdent au plus *deux* circuits distincts. Il est aussi connu que la courbe générale du quatrième degré *de genre :* $p = 3$ peut avoir *quatre* composantes séparées.

Le but de cette note est de montrer qu'une règle de ce type vaut pour les courbes d'un genre quelconque, *à savoir qu'une courbe de genre* p *ne peut pas comprendre plus de* $p + 1$ *circuits*, puis de montrer *qu'il existe vraiment, pour tout genre* p*, des courbes avec* $p+1$ *circuits.* La méthode qui sera appliquée dans cette présentation repose, conformément à la définition des courbes au moyen d'une équation algébrique à coefficients réels, exclusivement sur le théorème de Bezout et sur la séparation des circuits de courbes algébriques en *pairs* et *impairs* qui découle des travaux de v. Staudt et Möbius.

On entendra dans ce qui suit par circuit complet la totalité des composantes qu'il est nécessaire de parcourir pour que, partant d'un point du circuit et traversant d'autres points, chacun une seule fois en général, on revienne au point de départ, même si ce circuit apparaît décomposé en différentes *branches* à distance finie, comme par exemple pour l'hyperbole. Ici il faut aussi insister sur le fait que les variations de la direction tangente doivent être continues. Suivant ces remarques deux circuits de courbes, même s'ils se coupent, sont encore à considérer comme séparés.

Enfin il faut dire ici que l'étude ci-dessous, formulée principalement en termes de degré de courbes, a un caractère entièrement dual, de telle sorte qu'elle reste

[1] Le fait que cette représentation rationnelle et univoque de l'élément de courbe x en fonction d'un paramètre λ peut aussi être rendue univoque dans l'autre sens, de telle façon que les valeurs de x sont obtenues en général de manière univoque par un parcours continu de toutes les valeurs de λ, a été récemment démontré par Lüroth. Math. Ann. Bd. IX, p. 163.

valable quand les courbes sont considérées comme données par le mouvement d'une droite. Dans ce cas les circuits de courbes se divisent de la même façon en *pairs* et *impairs*, selon que le nombre de tangentes menées d'un point du plan au circuit est pair ou impair. Les circuits impairs dans ce sens sont caractérisés par un nombre *impair* de points de rebroussement ; et même ce nombre impair doit être au moins égal à *trois* s'il ne se rencontre aucune tangente double ou tangente d'inflexion sur le circuit. Cependant la présence de ces deux singularités, dont chacune doit être considérée comme absorbant deux points de rebroussements, ne change pas plus le caractère pair ou impair d'un circuit selon la classe, que la présence de points doubles ou de rebroussement ne modifie le caractère pair ou impair d'un circuit selon le degré.

Après ces remarque introductives j'en viens à la démonstration du théorème énoncé ci-dessus. Ceci demande la preuve : *premièrement* de l'impossibilité de $p+2$ ou plus circuits, puis de l'existence de $p+1$ circuits.

I.

Si l'on considère d'abord une courbe de degré n sans point multiple, dont le genre p est donc égal à $\frac{1}{2}(n-1).(n-2)$, alors on a le théorème que cette courbe n'a aucun circuit impair si n est pair et seulement un si n est impair. En effet deux circuits impairs se coupent en au moins un point, et donc, si la courbe de degré n contenait plusieurs tels circuits, il y aurait des points doubles, ce qui est exclu pour la courbe générale.

Supposons maintenant que la courbe de degré n se compose de $p+1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ circuits pairs (pour faire court, ceux-ci seront aussi désignés comme "ovales" dans la suite), auxquels s'ajoute encore un circuit impair si n est pair ou un circuit pair si n est pair. Il est connu que chaque circuit pair a la propriété d'être coupé par n'importe quel autre circuit algébrique toujours en un nombre pair de points, qui peut aussi être nul. Cette propriété va nous être utile quand nous construirons une courbe de degré $n-2$ qui coupe chacun des $p+1$ ovales en un point sur celui-ci. Par le résultat mentionné un point d'intersection sera à chaque fois accompagné d'un *deuxième* sur l'ovale.

Une courbe générale de degré $n-2$ est déterminée par $\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ points, de telle sorte que si on se donne un point d'intersection sur chacun des $p+1$ ovales, il y a encore la possibilité de choisir

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n+1) - \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) - 1 = n-3$$

points par lesquels cette courbe doit passer. Si l'on choisit ceux-ci sur le circuit restant de la courbe de degré n et si l'on compte le nombre de points en lesquels la courbe ainsi construite coupe la courbe donnée, il vient que ce nombre est au moins égal à $n(n-2)+2$, *ce que l'hypothèse d'avoir une courbe irréductible de degré n interdit.*

En effet les $p+1$ ovales, dont chacun doit être coupé en deux points, donnent ensemble $(n-1)(n-2)+2$ points. Le circuit considéré à part donne, s'il est pair, un nombre pair de points d'intersection, si bien que par la donnée des $n-3$ points il en vient encore un autre ; si au contraire il est impair, alors il sera rencontré par la courbe construite, dont le degré $n-2$ est alors impair, en un nombre impair de points, de sorte que dans ce cas aussi les $n-3$ points d'intersection donnés en produisent au moins encore un de plus. Dans les deux cas on trouve ainsi le nombre que l'on sait être impossible :

$$(n-1)(n-2)+2+(n-3)+1=n(n-2)+2\ .$$

On montre ainsi que, pour une courbe générale de degré n, le nombre de circuits complets ne peut être en aucun cas plus grand que $p+1$.

Ce théorème reste valable aussi pour les courbes qui ont des singularités. Dans la preuve de ceci je ne vais m'intéresser, pour ne pas devoir m'étendre, qu'aux singularités simples (points doubles et points de rebroussement).

Puisque pour ces considérations il faut tenir compte de la possibilité de plusieurs circuits impairs, dont les points d'intersection sont des points doubles, il faut ici mener l'étude en supposant donné le nombre de ces circuits impairs. Soit donc donnée une courbe de degré n, dont on suppose qu'elle comprend ν circuits impairs. Ceux-ci se coupent en au moins $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)$ points, qui sont donc des points doubles pour la courbe considérée. Par ailleurs cette courbe peut avoir encore d points doubles ou points de rebroussement, pour lesquels aucune hypothèse n'est faite sur la réalité ou la disposition, et dont une partie aussi peut venir du fait que deux des ν circuits impairs se coupent en plus d'un point. Le genre de la courbe est alors :

$$p=\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)-\tfrac{1}{2}\nu(\nu-1)-d$$

et il faut apporter la preuve qu'une telle courbe ne peut avoir en aucun cas plus de $p+1$ circuits, c'est-à-dire dans le cas considéré pas plus de $p+1-\nu$ ovales.

La preuve de cette affirmation présente quelques modifications, selon que le nombre n et par conséquent aussi le nombre ν est *pair* ou *impair*. On considère d'abord le premier de ces deux cas :

Étant supposé que la courbe a $p-\nu+2$ ovales, on construit de nouveau une courbe générale de degré $n-2$, qui coupe chacun de ces ovales en un point prescrit et par ailleurs passe simplement par les $\frac{1}{2}\nu(\nu-1)+d$ points doubles (ces derniers peuvent imposer des conditions imaginaires pour la courbe). Avec cette spécification il reste encore

$$\tfrac{1}{2}(n-2)(n+1)-\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)+\nu-2=n+\nu-4$$

degrés de liberté pour la construction de la courbe. On peut donc demander que celle-ci passe encore par $n+\nu-4$ points prescrits (ce qui fait un nombre *pair*), situés sur un seul des ovales. Si l'on compte maintenant en combien de points les deux courbes de degrés n et $n-2$ se coupent, il faut prendre en compte que chacun des $n-\nu+2$ points qui ont été pris sur les ovales apporte encore un deuxième point d'intersection, même quand se présentent des points doubles réels sur des ovales en forme de boucles ou de pointes, ou quand d'autres points doubles se produisent par l'intersection d'ovales entre eux ou avec les circuits impairs ; en effet cette dernière sorte de points doubles ne peut arriver que par paire sur chaque ovale. Puisque la courbe à construire rencontre chacun des circuits impairs de l'hypothèse en $\nu - 1$ points, et que ce nombre est impair tandis que la courbe à construire a un degré pair, il doit y avoir encore sur chaque circuit au moins un autre point d'intersection, même si d'autres points doubles que ces $\nu - 1$ sont présents sur un circuit impair. La somme de tous les points d'intersection sera donc au moins égale à :

$$2(p - \nu + 2) + 2d + \nu(\nu - 1) + \nu + n + \nu - 4 = n(n-2) + 2$$

ce que l'hypothèse interdit.

Si maintenant n et aussi ν sont impairs, on arrivera avec des considérations tout à fait analogues au même nombre impossible de points d'intersection, à ceci près que maintenant la donnée de $\nu - 1$ points en lesquels la courbe de degré $n - 2$ doit rencontrer un circuit impair entraîne encore un autre point d'intersection puisqu'un circuit impair de courbe est rencontré par une courbe algébrique de degré impair en un nombre impair de points[2].

II.

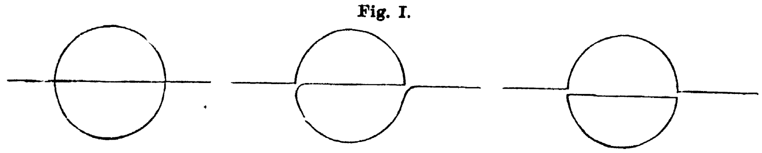
Afin d'établir l'*existence* de courbes avec le nombre maximal de circuits réels, on monte à partir des courbes connues de petit degré vers celles de plus haut degré, en ajoutant une droite à une courbe générale de degré n qui possède le nombre maximal approprié de circuits réels, et en envisageant le tracé de ces deux courbes en même temps. On verra que l'on peut ainsi construire une courbe de degré $n+1$ du type voulu, si l'on remplace d'après des principes connus les composantes de courbes qui arrivent aux points d'intersections communs par d'autres aux tracés semblables. Si on fait disparaître ainsi *tous* les points singuliers, en supposant la courbe de degré n elle-même sans singularités, on arrive seulement par ces considérations à une courbe *générale* de degré $n+1$, et on n'obtient pas ainsi le théorème que pour *chaque* genre p il y a des courbes avec $p+1$ circuits. Pour être complet il faudra considérer ensuite les cas où le genre a une des $n-2$ valeurs entre $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ et $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Si l'on prend tout d'abord une *courbe du deuxième degré*, en fait vu l'unicité une ellipse (${a_x}^2 = 0$), et que l'on coupe celle-ci par une droite ($v_x = 0$) en deux points réels, la configuration formée par ces deux courbes peut être décrite de deux manières différentes : ou bien on parcourt celle-ci par un circuit continu où l'on ne passe deux fois qu'aux deux points d'intersection, ou bien on fait deux

[2]Pour l'application de ces méthodes à des courbes avec des singularités plus élevées, on ne mentionne ici que la règle : on doit spécifier que la courbe de degré $n-2$ ait un point de multiplicité $k-1$ en un point de multiplicité k de la courbe de degré n, lequel point diminue le genre de cette courbe de $\frac{1}{2}k(k-1)$. Ce point est alors à compter $k(k-1)$ fois comme point d'intersection des deux courbes considérées.

circuits qui ne se touchent qu'en les deux points d'intersection.

Fig. I.



Le premier type de parcours engendre une courbe du troisième degré à *une composante*, le deuxième une courbe à *deux composantes.* On procède de la manière suivante pour obtenir l'équation d'une telle courbe à deux composantes, qui est celle qui nous intéresse ici : Soient $q_x^{(1)} = 0$, $q_x^{(2)} = 0$, $q_x^{(3)} = 0$ les équations de trois droites dont aucune ne coupe le segment fini de v_x qui se trouve à l'intérieur de l'ellipse[3] ; si λ est un paramètre arbitraire, la forme :

$$a_x^2 \cdot v_x + \lambda \cdot q_x^{(1)} \cdot q_x^{(2)} \cdot q_x^{(3)} = 0$$

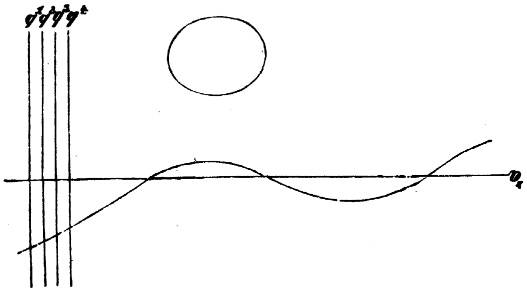
représente un faisceau de courbes du troisième degré. Si l'on prend pour λ une valeur infiniment petite, la courbe se trouvera au voisinage immédiat de la conique et de la droite ; ses six points d'intersection avec la première, ainsi que ses trois points d'intersection avec la seconde sont déterminés par le choix des droites q. Puisque la courbe ne rencontre la droite v_x en aucun des points à l'intérieur de la conique, un de ses circuits se trouve le long d'une moitié de la conique et de la partie de la droite à l'extérieur de la conique, tandis que l'autre circuit se trouve le long de l'autre moitié de la conique et aussi près du segment à l'intérieur. *On a ainsi contruit une courbe à deux composantes de genre :* $p = 1$ *; un circuit de cette courbe est coupé par la droite* v_x *en trois points réels.*

On passe maintenant de la courbe du troisième degré à deux composantes ainsi obtenue à la courbe de degré 4 recherchée par un procédé analogue. En effet, puisque l'hypothèse sur les droites q implique que la droite v_x coupe le circuit impair en trois points réels, ce circuit impair et cette droite forment ensemble trois ovales, dont deux se referment à distance finie, tandis que le troisième semble divisé par la droite de l'infini. Ces trois ovales se touchent en les trois points d'intersection, un quatrième donné par le circuit pair de la

[3]On peut aussi bien imposer que deux des droites q rencontrent le segment borné de v_x, par contre l'hypothèse que une ou les trois droites le rencontrent amène à un faisceau de courbes de degré 3 qui ne contient que des courbes à *une composante* près de $a_x^2 v_x = 0$

courbe du troisième degré se trouve à part.

Fig. II.



On choisit maintenant quatre droites : $q_x^{(1)} \cdots q_x^{(4)}$ qui ne rencontrent pas les deux segments finis de v_x. L'équation :

$$a_x^3 \cdot v_x + \lambda \cdot q_x^{(1)} \cdot q_x^{(2)} \cdot q_x^{(3)} \cdot q_x^{(4)} = 0$$

donne pour une valeur infiniment petite de λ une courbe du quatrième degré à *quatre composantes*, pourvu que l'on impose la condition toujours possible que cette courbe passe par un point à l'intérieur d'un des deux ovales situés à distance finie qui proviennent du circuit impair. *De nouveau un des circuits de cette courbe de degré 4 est coupé par la droite v_x en quatre points réels, précisément en les points d'intersection de cette droite avec les droites : $q_x^{(1)} \cdots q_x^{(4)}$.*

La courbe générale de degré 5, de genre $p = 6$, avec *sept* composantes s'obtient maintenant à partir de la courbe du quatrième degré à quatre composantes, vu que de nouveau la droite v_x est placée de façon à couper un circuit de celle-ci en quatre points réels. Cette configuration peut se diviser, selon les mêmes principes qui ont été appliqués ci-dessus, en trois ovales et un circuit impair. *La droite v_x coupe ce dernier circuit en cinq points réeels.*

Il est facile de voir que l'on peut poursuivre de cette manière. On passe toujours ainsi d'une courbe de degré n avec $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$ circuits, dont au moins un est coupé par une droite v_x en n points réels, à une courbe de degré $n+1$ avec $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+n = \frac{1}{2}n(n-1)+1$ circuits réels, ce qui fournit la preuve demandée.

Il y a seulement deux choses qui importent pour cette progression : premièrement, il doit y avoir parmi les $p+1$ circuits de la courbe de degré n au moins un qui est coupé par une droite v_x en n points réels ; ensuite les $n+1$ droites $q_x^{(i)}$ doivent être choisies de façon qu'aucune ne coupe la droite v_x à l'intérieur des $n-1$ segments finis délimités par les points d'intersection de la courbe de degré n. Ces prescriptions étant remplies, il faut aussi imposer la condition réalisable que la courbe de degré $n+1$ à construire passe par un point situé à l'intérieur d'un des $n-1$ domaines restant à distance finie qui donnent naissance à autant d'ovales, suffisamment près de la courbe originale[4].

[4]Par les conditions posées sur les droites $q_x^{(i)}$, la courbe décomposée $a_x^n \cdot v_x = 0$ marque

Pour montrer le théorème dans toute sa généralité, à savoir qu'en tout genre p il existe des courbes avec $p+1$ circuits, il faut aussi prendre en considération des courbes possédant des singularités. Précisément, on se demande si l'on peut sur une courbe générale de degré $n+1$ avec $p+1$ circuits faire apparaître successivement des points doubles réels ou imaginaires de telle façon que le genre de cette courbe diminue de un, deux ... jusqu'à au moins $n-2$ et qu'ainsi tous les nombres entre son genre de départ et le genre de la courbe générale de degré n soient atteints. Si dans cette progression *un seul circuit* disparaît à chaque fois, le théorème annoncé sera démontré.

Pour montrer ceci et suivant le principe qui a été appliqué jusqu'ici, on doit décrire un moyen de passer d'une courbe de degré n avec $n-3$ points doubles (ou moins) à une courbe de degré $n+1$ avec $n-2$ (ou moins) points doubles, de telle façon qu'il n'y ait pas plus que le nombre voulu de circuits à disparaître, à savoir : qu'il en reste encore $p+1$ présents.

Étant donné une courbe de degré n qui possède $n-2$ points doubles et $p+1$ circuits, dont un est coupé par une droite ($v_x = 0$) en n points réels distincts, — hypothèses que l'on sait réalisable pour des courbes de petit degré, par exemple pour $n = 3$ ou 4, — on peut toujours construire une deuxième courbe de degré n ($\alpha_x^n = 0$) qui possède les mêmes points doubles que la première et qui en plus coupe la droite v_x en n points prescrits. On choisit ces n points par lesquels $\alpha_x^n = 0$ doit passer de façon que l'un d'entre eux coïncide avec un des points d'intersection de v_x et a_x^n, et plus précisément avec un des deux en lesquels les segments finis découpés sur v_x touchent celui qui part à l'infini. on prend les $n-1$ points restants tous sur ce dernier segment. Si l'on prend en plus une droite ($w_x = 0$) qui passe par le même point d'intersection de v_x et a_x^n par lequel α_x^n passe, l'équation :

$$a_x^n \cdot v_x + \lambda\, \alpha_x^n \cdot w_x = 0$$

représente en général, pour des valeurs arbitraires de λ, une courbe de degré $n+1$ avec $n-2$ points doubles. En effet les points doubles de la courbe de degré n et l'unique point d'intersection de v_x et w_x sont des points singuliers pour toutes les courbes du faisceau. Pour des valeurs infiniment petites de λ la courbe se trouve infiniment proche de la configuration $a_x^n \cdot v_x$, et elle possède le nombre maximal correspondant au genre si on satisfait à la condition essentielle que, en dehors de l'unique ovale qui se dispose en boucle près du circuit qui va à l'infini, chaque autre forme un circuit par lui-même. Il suit de l'hypothèse que ni la courbe α_x^n ni la droite w_x ne rencontrent un des segments finis de v_x. Sur la courbe de degré $n+1$ il y a ainsi $n-2$ circuits de plus que sur la courbe de degré n, ce qui démontre l'affirmation. On voit aussi qu'une droite proche de v_x coupe un unique circuit de courbe en $n+1$ points réels distincts, de sorte que l'on peut passer par le même procédé de la courbe de degré $n+1$ ainsi obtenue à une courbe de degré $n+2$ avec $n-1$ points doubles (ou moins).

---

la transition à l'intérieur du faisceau $a_x^n \cdot v_x + \lambda \cdot q_x^{(1)} \cdots q_x^{(n+1)} = 0$ entre les courbes avec $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ circuits et les courbes avec $\frac{1}{2}n(n-1)-(n-3)$ ou $\frac{1}{2}n(n-1)-(n-2)$ circuits, selon que n est pair ou impair.

Avec ces considérations, qui peuvent être modifiées de diverses façon, on achève la preuve de cette propriété remarquable des courbes algébriques :

Pour chaque genre p il y a des courbes avec le nombre maximal $p+1$ de circuits.

De telles courbes semblent présenter un avantage important pour établir les fondements des recherches sur les intégrales algébriques et les fonctions qui s'en déduisent par inversion, en ce que les correspondances fonctionnelles apparaissent plus complètement dans le réel pour ces courbes que pour les courbes avec moins de circuits. Ainsi, pour ne mentionner que ceci, les $2p$ périodes d'une intégrale partout finie relative à la courbe acquièrent le sens géométrique que p d'entre elles proviennent du passage d'un circuit réel aux p autres, tandis que les p périodes restantes sont produites par le parcours de ces p circuits réels. La période associée au premier circuit doit déjà être considérée comme combinaison linéaire des autres. Un exposé plus précis de ces relations demande d'examiner de plus près comment se placent par rapport à une courbe de degré n les courbes adjointes de degré $n-3$, et comment est fait le système des $2p+2(n-2)$ tangentes issues d'un point de la courbe de degré n.

Les considérations précédentes doivent aussi être prolongées dans la direction de recherches sur le groupement précis et la disposition relative des différents circuits, du point de vue de l'influence que ceci peut avoir sur la diminution du nombre de circuits réels présents en fin de compte. Puisque l'on pourra de là accéder à l'influence des points multiples, ces recherches amèneront entre autres à résoudre le problème du nombre de composantes aussi pour les courbes dans l'espace.

Leipzig, Janvier 1876.