Résolution des systèmes d'égalités et d'inégalités polynomiales dépendant de paramètres

Fabrice Rouillier (INRIA Rocquencourt)

30 Janvier 2004
Séminaire de calcul formel, Rennes

Nous supposons que l'on veut étudier un système de la forme

$$\{p_1 = 0, \ldots p_s = 0, f_1 > 0, \ldots f_s > 0\}$$

où les polynômes p_i, f_j appartiennent à $K[U_1, \ldots U_d, X_{d+1}, \ldots X_n]$, K étant un corps de caractéristique zéro (ordonné dans le cas réel). On notera $\mathcal{E} = \{p_1, \ldots p_s\}$, $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots f_l\}$, $V_C \subset C^n$ la variété définie par les zéros de $I =< p_1, \ldots p_s >$, $\mathcal{C} = \{x \in C^n p_1 = 0, \ldots p_s = 0, f_1 \neq 0, \ldots f_s \neq 0\}$ et $\mathcal{S} = \{x \in R^n p_1 = 0, \ldots p_s = 0, f_1 > 0, \ldots f_s > 0\}$, où R est un corps réel clos contenant K et C la cloture algébrique de C.

Les systèmes paramètrés à résoudre dans la plupart des applications sont en général tels que l'extension de l'idéal $I =< p_1, \ldots, p_s >$ dans $K(U_1, \ldots U_d)[X_{d+1}, \ldots X_n]$, que nous noterons I^e, soit zero-dimensionnelle. Nous appellerons $[U_1, \ldots U_d, X_{d+1}, \ldots X_n]$ l'ensemble des indéterminées du problème, $[U_1, \ldots U_d]$ l'ensemble des paramètres et $[X_{d+1}, \ldots X_n]$ l'ensemble des variables.

La plupart des algorithmes permettant d'étudier ce type de systèmes (nombre de racines en fonction des paramètres, paramétrisations des solutions, etc.) calculent systématiquement une décomposition de l'espace des paramètres (C^d ou R^d) contenant une collection dense d'ouverts dont l'image réciproque par la projection canonique sur l'espace des paramètres ($\Pi_U : C^n \longrightarrow C^d$) est un revêtement analytique.

Nous appellerons variété discriminante large du système (associée à Π_U), toute K-variété algébrique (zéros de polynômes à coefficients dans K) induisant une partition de l'espace des paramètres constituée de la variété elle même et d'ouverts connexes (maximaux pour l'inclusion) $\mathcal{U}_1, \ldots \mathcal{U}_k$ tels que :

- $(\Pi_U^{-1}(\mathcal{U}_i) \bigcap V_C, \Pi_U)$ soit un revêtement analytique de $\mathcal{U}_i$ pour tout $i = 1 \ldots k$;
- les éléments de $\mathcal{F}$ sont de signes constants sur $\Pi_U^{-1}(\mathcal{U}_i) \bigcap V_C$ pour tout $i = 1 \ldots k$;

La décomposition cylindrique algébrique adaptée à $\mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$ permet de calculer explicitement une variété discriminante large de $\mathcal{C}$ ou $\mathcal{S}$, pourvu que les calculs aient été effectués en traitant les paramètres $U_1, \ldots, U_d$ en dernier : il suffit de considérer la variété algébrique définie par l'ensemble des zéros des polynômes obtenus après la $n-d$-ieme étape de projection. Elle n'est absolument pas optimale en termes de nombres d'ouverts produits puisqu'elle contient, entre autres, des variétés discriminantes pour tous les systèmes d'égalités et d'inégalités que l'on peut construire en utilisant les polynômes de $\mathcal{E} \bigcup \mathcal{F}$ (rappelons que la CAD fournit, dans tous les cas, une stratification en cellules de $\mathbb{R}^n$, adaptée à une famille de polynômes).

La plupart des autres techniques de calcul, du moins, celles qui ne considèrent pas le problème récursivement en fonction des variables, utilisent massivement le fait que, sous certaines hypothèses assez peu restrictives, I^e est zéro-dimensionnel.

C'est le cas des techniques de type Hermite ou des calculs de paramétrisations qui produisent des résultats directement exploitables, mais c'est souvant le cas également des algorithmes de décomposition en idéaux équi-dimensionnels, l'équi-dimensionalité de V_C étant très souvant un prérequis pour beaucoup de méthodes). Ces méthodes calculent et exploitent de façon visible ou non une variété discriminante le plus souvant de type "large".

Par exemple, les techniques basées sur les "Comprehensive Gröbner bases", calculent une variété discriminante large. Elles ne sont pas optimales puisqu'elles contiennent les valeurs de paramètres dépendant de la stratégie utilisée. Plus précisément, on retrouvera (au moins) les valeurs de mauvaise spécialisation de bases de Gröbner.

Les paramétrisations en tous genres calculent explicitement ou implicitement elles aussi des variétés discriminantes larges. La encore, celles -ci ne sont pas optimales puisqu'elles dépendent de la stratégie utilisée. En effet, elles dépendent du choix d'un polynôme "séparant", polynôme minimal ou caratéristique d'un élément primitif t de $\mathbb{Q}(U_1, \ldots, U_d)[X_{d+1}, \ldots, X_n]$: la variété représentant les valeurs exceptionnelles des paramètres à exclure pour que la paramétrisation soit valide est une variété discriminante large. Elle contient, en général, le discriminant et le terme de tête de ce polynôme incluant, en particulier, les valeurs des paramètres telles que la spécialisation de t en ces paramètres ne sépare pas les zéros de la spécialisation du système (en ces paramètres). Dans la première partie, nous définissons une notion de variété discriminante stricte. Cette variété est en particulier une variété discriminante large mais elle est uniquement définie pour un système et une projections donnés. Nous montrerons qu'elle est optimale dans tous les cas (resp. dans le pire des cas) dans le cadre complexe (resp. dans le cadre réel) pour le nombre d'ouverts contenus dans la partition qu'elle induit. En particulier, elle est indépendante de tout algorithme de calcul.

Dans la deuxième partie, nous proposons plusieurs stratégies pour calculer la variété discriminante associée à un système paramètré n'utilisant que des outils connus (ensembles triangulaires, bases de Gröbner). Ce type de calcul dépendant fortement des propriétés des systèmes étudiés (equi-dimensionels ou non, ideaux radicaux ou non), nous proposons un algorithme adaptatif ayant le bon goût de ne pas supposer que l'on est systématiquement dans la plus mauvaise des situations. En d'autres termes, des tests simples permettent à tout moment d'adapter la stratégie de calcul et d'utiliser les outils les plus efficaces possibles.

La troisième partie est dédiée à l'utilisation de la variété discriminante pour répondre à quelques questions pratiques (nombre de zéros réels en fonction des paramètres, stratification de V_C, etc.).