Une introduction à l'analyse algébrique effective et à ses applications

Alban Quadrat,

INRIA Sophia Antipolis,
Projet Café,
2004, Route des Lucioles BP 93,
06902 Sophia Antipolis Cedex.

Alban.Quadrat@sophia.inria.fr
www-sop/cafe/Alban.Quadrat/index.html.

Mots-clés :

Etudes des systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles, systèmes sous-/sur-déterminés, D-modules algébriques, bases de Gröbner non-commutatives, théorie du contrôle, physique mathématique.

Résumé

L'analyse algébrique a été développée dans les années 60 afin d'étudier les systèmes généraux linéaires d'équations aux dérivées partielles (EDPs) à coefficients constants ou variables (e.g., coefficients polynomiaux, rationnels). L'idée centrale est d'associer à un système linéaire d'EDPs un module de présentation finie sur un anneau d'opérateurs différentiels. Alors, en utilisant la théorie des modules, l'algèbre homologique, l'analyse fonctionnelle et les méthodes constructives de l'algèbre effective (e.g., bases de Gröbner non-commutatives, bases de Janet), on peut alors étudier les propriétés intrinsèques de ce module et les interpréter en termes du système initial [4].

Le but de cet exposé est de donner des algorithmes effectifs permettant de reconnaître certaines propriétés des systèmes d'EDPs sur-déterminés (e.g., opérateurs de divergence ou de rotationnel, équations de Maxwell, équations d'Einstein) à l'aide de la classification suivante des modules : modules possédant de la torsion, modules sans-torsion, modules réflexifs, modules projectifs, modules stablement libres, modules libres [2, 3]. Nous montrerons comment ces propriétés sont reliées à la possibilité de paramétrer les solutions de tels systèmes à l'aide de fonctions arbitraires [2, 3].

Finalement, nous illustrerons ces différents résultats sur des problèmes venant de la théorie du contrôle (e.g., étude de la contrôlabilité, de l'existence d'une représentation image, étude du suivi de trajectoire et de la commande optimale) et de la physique mathématique (e.g., étude de l'existence de potentiel pour les équations de Maxwell ou d'Einstein). Des exemples explicites seront étudiés à l'aide de la librairie OreModules développée en Maple [1]. Une extension de ces résultats à d'autres classes d'algèbre d'opérateurs fonctionnels sera aussi évoquée.

Références

[1] F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz, OreModules *project*, `http ://wwwb.math.rwth-aachen.de/OreModules/`, 2003.

[2] F. Chyzak, A. Quadrat, D. Robertz, "Effective algorithms for parametrizing linear control systems over Ore algebras", rapport INRIA 5181, à paraître dans *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, 2005, `www-sop.inria.fr/cafe/Alban.Quadrat/index.html`.

[3] J.-F. Pommaret, A. Quadrat, "Algebraic analysis of linear multidimensional control systems", *IMA Journal of Control and Information*, 16 (1999), 247-260.

[4] A. Quadrat, "An introduction to the algebraic theory of linear systems of partial differential equations", 2004, `www-sop.inria.fr/cafe/Alban.Quadrat/Temporaire.html`.