Exposé à Rennes (29 Mars 07)

D. Bertrand : Point de vue de gauche sur une formule de Shimura-Taniyama-Giraud-Waterhouse.

Résumé

Borner, en fonction de $deg(Y)^{\frac{1}{d}}$, les degrés d'un système d'équations pour une variété quasi-projective Y de dimension d est un problème classique, qui se ramène dans le cas d'un sous-tore $Y \simeq \mathbf{G}_m^d$ d'un tore $G = G_m^N$, à calculer la hauteur de W. Schmidt du sous-groupe $R(Y)$ des caractères de G s'annulant sur Y. Quand $\mathbf{G}_m$ est remplacé par une variété abélienne complexe principalement polarisée (A, λ) de dimension g, dont l'anneau d'endomorphisme $\mathcal{O}$ est un ordre maximal d'une algèbre à division, un analogue $H^{\lambda,\mathcal{O}}$ de cette hauteur a été construit par G. Rémond et C. Liebendörfer, qui obtiennent $H^{\lambda,\mathcal{O}}(R(Y)) = (deg(Y)/d!)^{1/2g}$. Nous donnons une autre démonstration de cette identité, inspirée par un travail en collaboration avec D. Masser, et valable en toute caractéristique, en ramenant le calcul de la "partie finie" de la hauteur à la formule du titre: pour tout idéal à gauche complet I de A, le sous-schéma en groupes des points de I-torsion de A a pour ordre $\sharp A[I] = [\mathcal{O} : I]^{2g/rk(\mathcal{O})}$. Nous rappellerons les preuves, droitières, données de cette formule par Shimura-Taniyama et Waterhouse, puis celle, centriste, de Giraud, mais c'est à une nouvelle preuve, de nature résolument gauchiste, que sera consacré l'essentiel de l'exposé.