# Algèbres d'invariants pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en petites caractéristiques

En 1868, Gordan a démontré que l'algèbre des invariants, notée $\mathcal{I}_n$, de l'espace des formes binaires de degré $n$ à coefficients dans un corps, sous l'action du groupe spécial linéaire, est de type fini. Or, il s'avère que la classification à isomorphisme près des courbes hyperelliptiques de genre $g$, sur un corps algébriquement clos $K$, est naturellement reliée à l'algèbre d'invariants $\mathcal{I}_{2g+2}$. Ainsi les classes de courbes hyperelliptiques de genre $g$ $K$-isomorphes peuvent être représentées par les valeurs prises par un ensemble fini d'éléments de $\mathcal{I}_n$. Autrement dit, la possession d'un jeu explicite de générateurs de l'algèbre $\mathcal{I}_n$ constitue la première étape pour rendre effective la géométrie des espaces de modules de courbes hyperelliptiques, la seconde étape étant la reconstruction d'une courbe à partir de son module.

Le premier objectif peut être atteint classiquement, en caractéristique nulle, via un opérateur différentiel (le transvectant) introduit par Clebsch dans la seconde moitié du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Ont ainsi été exhibés des systèmes de générateurs pour les genres 2 et 3 au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, Shioda ayant par la suite donné une description complète de l'algèbre $I_8$ en 1967 [Shi67]. La seconde question trouve sa réponse via un algorithme proposé par Mestre en 1991 [Mes91] pour les courbes de genre 2.

Comme l'ont toutefois souligné Lercier et Ritzenthaler dans leurs travaux sur les courbes hyperelliptiques de genre 2 en 2008 et de genre 3 en 2011 [LR11], les techniques précédentes, qui ont été introduites pour la caractéristique nulle, ne peuvent pas s'appliquer lorsque la caractéristique est inférieure à $2g+1$. Pour le genre 2, Igusa avait proposé en 1960 des invariants alternatifs valables en toutes caractéristiques. En revanche, le cas des petites caractéristiques en genre 3 (i.e. 2, 3, 5 et 7) restait ouvert.

Nos premiers travaux de thèse ont, par conséquent, eu pour objectif de déterminer la structure des algèbres d'invariants $\mathcal{I}_8$ pour les petites caractéristiques 2, 3, 5 et 7. Pour les cas impairs, cette tâche a été abordée en systématisant la méthode employée par Igusa pour l'obtention d'invariants en genre 2, ce qui nous a permis d'ores et déjà d'exhiber des systèmes de générateurs :

| Car. | # Gen. $\mathcal{I}_8$ | Degrés des générateurs (un exposant signifie une répétition) |
|---|---|---|
| $0$ ou $\geqslant 11$ | 9 | $2,3,4,5,6,7,8,9,10$ |
| 3 | 10 | $2,3,4,5,6,7,8,9,10,12$ |
| 5 | 62 | $1,4,6^2,8^2,9,10^2,11,12^3,13,14^3,15^3,16^3,17^3,18^3,19^2,20^4,21^4,$ $22^2,23^2,24^3,25^3,26,27^2,28^2,29^2,30,31,32,33^2,37$ |
| 7 | 13 | $2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15$ |

Pour la caractéristique 2, notre angle d'approche est sensiblement différent, en se basant sur le modèle d'Artin-Schreier d'une courbe hyperelliptique.

## Références


[LR11] R. Lercier and C. Ritzenthaler. Hyperelliptic curves and their invariants : geometric, arithmetic and algorithmic aspects. *Arxiv preprint arXiv :1111.4152*, 2011.

[Mes91] Jean-François Mestre. Construction de courbes de genre 2 à partir de leurs modules. In *Effective methods in algebraic geometry*, volume 94, pages 313–334, Boston, 1991. Birkhäuser.

[Shi67] Tetsuji Shioda. On the graded ring of invariants of binary octavics. *American Journal of Mathematics*, 89(4) :1022–1046, October 1967.