Algèbres d'invariants pour les courbes hyperelliptiques de genre 3 en petites caractéristiques

Romain Basson

IRMAR - Université de Rennes 1

Journées C2
07-12 octobre 2012

Courbes de genre 1

Soit k un corps, car $k \neq 2, 3$, et $\bar{k}$ une clôture algébrique de k.

- Les courbes elliptiques $E/k : y^2 = x^3 + ax + b$ sont classifiées à $\bar{k}$-isomorphisme près par

$$j(E) = 1728 \frac{4a^3}{4a^3 + 27b^2}$$

- Réciproquement, pour $j \in \bar{k} \setminus \{1728\}$, la courbe elliptique E suivante vérifie $j(E) = j$:

$$E/k(j) : y^2 = x^3 - \frac{27j}{j - 1728}x + \frac{54j}{j - 1728}$$

- $Aut(E) \simeq \begin{cases} C_2 & \text{si } j(E) \neq 0, 1728 \\ C_4 & \text{si } j(E) = 1728 \\ C_6 & \text{si } j(E) = 0 \end{cases}$

k corps de caractéristique différente de 2, $\bar{k}$ une clôture algébrique.

Problème

Peut-on faire la même chose pour les courbes hyperelliptiques de genre $g \geq 2$, *i.e.* $C/k : y^2 = f(x)$, *où* $\deg f = 2g + 2$ *et* f *est à racines simples ?*

$$\{\text{Courbes hyperelliptiques de genre } g\}_{/\simeq} \longleftrightarrow \{\text{espace de paramètres}\}$$

k corps de caractéristique différente de 2, $\bar{k}$ une clôture algébrique.

Problème

Peut-on faire la même chose pour les courbes hyperelliptiques de genre $g \geq 2$, i.e. $C/k : y^2 = f(x)$, où $\deg f = 2g + 2$ et f est à racines simples ?

$$\{\text{Courbes hyperelliptiques de genre } g\}_{/\simeq} \longleftrightarrow \{\text{espace de paramètres}\}$$

Motivations :

- tester si deux courbes sont isomorphes ;
- reconnaître le groupe d'automorphismes d'une courbe ;
- obtenir des informations géométriques et arithmétiques sur l'espace de module ;
- construction de courbes spécifiques (structure CM, ...) ;
- énumérer les courbes sur un corps finis pour des expérimentations.

Des courbes hyperelliptiques aux formes binaires

Courbes hyperelliptiques de genre $g \geq 2$: $C/k : y^2 = f(x)$, où $\deg f = 2g + 2$ et f est à racines simples

Proposition

Soit $C : y^2z^{2g} = f(x,z)$ et $C' : y^2z^{2g} = f'(x,z)$ deux courbes hyperelliptiques de genre g. Tout isomorphisme de C sur C' est de la forme :

$$(x, z, y) \longmapsto (ax + bz, cx + dz, ey)$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\bar{k})$ et $e \in \bar{k}^\star$.

Des courbes hyperelliptiques aux formes binaires

Courbes hyperelliptiques de genre $g \geq 2$: $C/k : y^2 = f(x)$, où $\deg f = 2g + 2$ et f est à racines simples

Proposition

Soit $C : y^2 z^{2g} = f(x,z)$ et $C' : y^2 z^{2g} = f'(x,z)$ deux courbes hyperelliptiques de genre g. Tout isomorphisme de C sur C' est de la forme :

$$(x, z, y) \longmapsto (ax + bz, cx + dz, ey)$$

où $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\bar{k})$ et $e \in \bar{k}^\star$.

Le problème de la classification se réduit ainsi à celui de l'équivalence de deux formes binaires.

Notations

- Le groupe $\mathrm{SL}_2(\bar{k})$ agit naturellement à gauche sur k^2 :

$$M.(x,z) = (ax+bz, cx+dz), \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\bar{k}), \quad (x,z) \in k^2$$

- Espace des formes binaires de degré n à coefficients dans k :

$$V_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i z^{n-i} \; / \; a_i \in k \right\}$$

- $\mathrm{SL}_2(\bar{k})$ agit sur V_n : pour $f \in V_n$ et $M \in \mathrm{SL}_2(\bar{k})$,

$$(M.f)(x,z) = f(M^{-1}.(x,z)), \quad \forall (x,z) \in k^2$$

Invariants

Définition

Une fonction polynomiale $\Gamma : k[V_n] \longrightarrow k$ *de degré* d *est un* ***invariant*** *lorsque, pour* $M \in SL_2(\bar{k})$ *et* $f \in V_n$,

$$\Gamma(M.f) = \Gamma(f)$$

Exemple : le discriminant d'une forme binaire de degré n est un invariant de degré $2n - 2$.

Invariants

Définition

Une fonction polynomiale $\Gamma : k[V_n] \longrightarrow k$ *de degré* d *est un* ***invariant*** *lorsque, pour* $M \in SL_2(\bar{k})$ *et* $f \in V_n$,

$$\Gamma(M.f) = \Gamma(f)$$

Exemple : le discriminant d'une forme binaire de degré n est un invariant de degré $2n - 2$.

On note $\mathcal{I}_n$ l'algèbre graduée (par le degré) des invariants des formes binaires de degré n sous l'action de $\mathrm{SL}_2(\bar{k})$.

Proposition

Soit f et f' deux formes binaires de degré n supérieur à 3 dont les multiplicités des racines (dans $\bar{k}$) sont inférieures à $n/2$. Alors f et f' sont dans la même orbite sous l'action de $GL_2(\bar{k})$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \bar{k}$ tel que $J(f) = \lambda^d J(f')$, pour tout $J \in \mathcal{I}_n$ homogène de degré d.

Proposition

Soit f et f' deux formes binaires de degré n supérieur à 3 dont les multiplicités des racines (dans $\bar{k}$) sont inférieures à $n/2$. Alors f et f' sont dans la même orbite sous l'action de $GL_2(\bar{k})$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \bar{k}$ tel que $J(f) = \lambda^d J(f')$, pour tout $J \in \mathcal{I}_n$ homogène de degré d.

Théorème (Gordan, 1868, $k = \mathbb{C}$)

$\mathcal{I}_n$ est une $\mathbb{C}$-algèbres de type fini.

La preuve de Gordan est effective via un opérateur différentiel (le transvectant) qui permet de générer, à partir de f, un système de générateurs minimal (les invariants fondamentaux) de $\mathcal{I}_n$.

Premiers exemples

- $n = 2$: $f = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $\Delta(f) = a_1^2 - 4a_2a0$ et on montre que

$$\mathcal{I}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[a_1^2 - 4a_2a0]$$

Premiers exemples

- $n = 2$: $f = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $\Delta(f) = a_1^2 - 4a_2a0$ et on montre que
$$\mathcal{I}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[a_1^2 - 4a_2a0]$$
- $n = 6$ (Clebsch, 1872) : $\mathcal{I}_6(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A, B, C, D, R]$ est générée par cinq invariants fondamentaux de degrés $2, 4, 6, 10$ et 15 ...

Premiers exemples

- $n = 2$: $f = a_2x^2 + a_1x + a_0$, $\Delta(f) = a_1^2 - 4a_2a0$ et on montre que

$$\mathcal{I}_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[a_1^2 - 4a_2a0]$$

- $n = 6$ (Clebsch, 1872) : $\mathcal{I}_6(\mathbb{C}) = \mathbb{C}[A, B, C, D, R]$ est générée par cinq invariants fondamentaux de degrés $2, 4, 6, 10$ et 15 ...

  ... liés par une relation de degré 30 :

$$R^2 = -D^3 + BCD^2 + \frac{1}{6}AB^2D^2 - \frac{8}{9}C^5 + \frac{4}{3}B^2C^2D + \cdots - \frac{16}{243}A^3B^3C^2$$

Série de Hilbert

$R = \oplus_{d=0}^{+\infty} R_d$ une $k = R_0$-algèbre graduée, avec $\dim R_d < +\infty$.

Définition

*La **série de Hilbert** de R est :* $H(R,t) = \sum_{d=0}^{+\infty} \dim R_d \; t^d$.

Exemple : $H(k[X_1, \ldots, X_n], t) = \frac{1}{(1-t^{d_1})\ldots(1-t^{d_n})}$, où $\deg X_i = d_i$.

Série de Hilbert

$R = \oplus_{d=0}^{+\infty} R_d$ une $k = R_0$-algèbre graduée, avec $\dim R_d < +\infty$.

Définition

*La **série de Hilbert** de R est :* $H(R,t) = \sum_{d=0}^{+\infty} \dim R_d \ t^d$.

Exemple : $H(k[X_1,\ldots,X_n],t) = \frac{1}{(1-t^{d_1})\ldots(1-t^{d_n})}$, où $\deg X_i = d_i$.

Proposition

L'ordre du pôle de $H(R,t)$ en $t = 1$ est le degré de transcendance de R sur R_0.

Série de Hilbert

$R = \oplus_{d=0}^{+\infty} R_d$ une $k = R_0$-algèbre graduée, avec $\dim R_d < +\infty$.

Définition

*La **série de Hilbert** de R est :* $H(R,t) = \sum_{d=0}^{+\infty} \dim R_d \ t^d$.

Exemple : $H(k[X_1, \ldots, X_n], t) = \frac{1}{(1-t^{d_1})\ldots(1-t^{d_n})}$, où $\deg X_i = d_i$.

Proposition

L'ordre du pôle de $H(R,t)$ en $t = 1$ est le degré de transcendance de R sur R_0.

$H(\mathcal{I}_n, t)$ est connu pour $k = \mathbb{C}$ et $n \leq 10$ (Sylvester & Franklin, 1879) et pour $n \# 10^2$ de nos jours.

Système homogène de paramètres

Définition

On appelle ***système homogène de paramètres*** *tout ensemble d'éléments homogènes $f_1, \ldots, f_r \in R = \oplus_{d=0}^{+\infty} R_d$ tel que :*

1. *$f_1, \ldots, f_r$ sont algébriquement indépendants sur $k = R_0$;*
2. *$R = g_1 P + \cdots + g_s P$ est un $P = R_0[f_1, \ldots, f_r]$-module de type fini.*

On appelle les f_i (resp. les g_i) les ***invariants primaires*** *(resp.* ***secondaires****).*

Remarque : pour les algèbres $\mathcal{I}_n$, R est un P-module libre, ainsi chaque invariant à une écriture unique dans ce système de générateurs.

Système homogène de paramètres

Définition

*On appelle **système homogène de paramètres** tout ensemble d'éléments homogènes $f_1, \ldots, f_r \in R = \oplus_{d=0}^{+\infty} R_d$ tel que :*

1. *$f_1, \ldots, f_r$ sont algébriquement indépendants sur $k = R_0$;*
2. *$R = g_1 P + \cdots + g_s P$ est un $P = R_0[f_1, \ldots, f_r]$-module de type fini.*

*On appelle les f_i (resp. les g_i) les **invariants primaires** (resp. **secondaires**).*

Remarque : pour les algèbres $\mathcal{I}_n$, R est un P-module libre, ainsi chaque invariant à une écriture unique dans ce système de générateurs.

Proposition

Si $R = \oplus_{d=0}^{+\infty} R_d$ est une R_0-algèbre graduée de type fini, alors elle admet un système homogène de paramètres.

Retour sur les courbes elliptiques

$g = 1$, on s'intéresse donc à $\mathcal{I}_4$. On a $H(\mathcal{I}_4, t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$.

$\mathcal{I}_4 = \mathbb{C}[J_2, J_3]$, avec J_2 et J_3 algébriquement indépendants sur k.

Retour sur les courbes elliptiques

$g = 1$, on s'intéresse donc à $\mathcal{I}_4$. On a $H(\mathcal{I}_4, t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$.

$\mathcal{I}_4 = \mathbb{C}[J_2, J_3]$, avec J_2 et J_3 algébriquement indépendants sur k.

Pour $f = a_4x^4 + a_3x^3y + a_2x^2y^2 + a_1xy^3 + a_0y^4 \in V_4$,

- $J_2 = \frac{1}{6}(12a_4a_0 - 3a_3a_1 + a_2^2)$
- $J_3 = \frac{1}{72}(72a_4a_2a_0 + 27a_4a_1^2 - 27a_3^2a_0 + 9a_2a_3a_1 - 2a_2^3)$

Retour sur les courbes elliptiques

$g = 1$, on s'intéresse donc à $\mathcal{I}_4$. On a $H(\mathcal{I}_4, t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$.

$\mathcal{I}_4 = \mathbb{C}[J_2, J_3]$, avec J_2 et J_3 algébriquement indépendants sur k.

Pour $f = a_4x^4 + a_3x^3y + a_2x^2y^2 + a_1xy^3 + a_0y^4 \in V_4$,

- $J_2 = \frac{1}{6}(12a_4a_0 - 3a_3a_1 + a_2^2)$
- $J_3 = \frac{1}{72}(72a_4a_2a_0 + 27a_4a_1^2 - 27a_3^2a_0 + 9a_2a_3a_1 - 2a_2^3)$

$\Delta(f) = 32J_2^3 - 192J_3^2$, invariant absolu $j = \frac{J_2^3}{\Delta}$

Retour sur les courbes elliptiques

$g = 1$, on s'intéresse donc à $\mathcal{I}_4$. On a $H(\mathcal{I}_4, t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-t^3)}$.

$\mathcal{I}_4 = \mathbb{C}[J_2, J_3]$, avec J_2 et J_3 algébriquement indépendants sur k.

Pour $f = a_4x^4 + a_3x^3y + a_2x^2y^2 + a_1xy^3 + a_0y^4 \in V_4$,

- $J_2 = \frac{1}{6}(12a_4a_0 - 3a_3a_1 + a_2^2)$
- $J_3 = \frac{1}{72}(72a_4a_2a_0 + 27a_4a_1^2 - 27a_3^2a_0 + 9a_2a_3a_1 - 2a_2^3)$

$\Delta(f) = 32J_2^3 - 192J_3^2$, invariant absolu $j = \frac{J_2^3}{\Delta}$

Pour E/k : $y^2 = x^3 + Ax + B$, soit $a_4 = 0, a_3 = 1, a_2 = 0, a_1 = A$ et $a_0 = B$,

$J_2 = -\frac{A}{2}$, $J_3 = -\frac{3B}{8}$, $\Delta = -4A^3 - 27B^2$ et $j = -\frac{A^3}{\Delta}$

Sextiques - Courbes de genre 2

$g = 2$, on s'intéresse donc à $\mathcal{I}_6$, pour laquelle

$$\begin{aligned} H(\mathcal{I}_6, t) &= \frac{1 + t^{15}}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})} \\ &= \frac{1 - t^{30}}{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)(1-t^{10})(1-t^{15})} \end{aligned}$$

- Invariants primaires : A, B, C et D.
- Invariants secondaires : R.

$$\mathcal{I}_6 = \mathbb{C}[A, B, C, D] \oplus R\,\mathbb{C}[A, B, C, D]$$

avec $\mathfrak{R}_{30} : R^2 = -D^3 + BCD^2 + \frac{1}{6}AB^2D^2 + \cdots - \frac{16}{243}A^3B^3C^2$.

$$0 \to \mathbb{C}[X_2, X_4, X_6, X_{10}, X_{15}]\mathfrak{R}_{30} \to \mathbb{C}[X_2, X_4, X_6, X_{10}, X_{15}] \to \mathcal{I}_6 \to 0$$

Octiques - Courbes de genre 3

Théorème (Shioda, 1967)

$\mathcal{I}_8 = \mathbb{C}[J_2, \ldots, J_{10}]$, avec $\deg J_i = i$ et $J_2, \ldots, J_7$ algébriquement indép. Il existe 5 relations entre ces générateurs, $\mathfrak{R}_i(J)$, de degré $15 + i$, $1 \leq i \leq 5$; liées par 5 premières syzygies $\mathfrak{T}_i(R)$, de degré $24 + i$, $1 \leq i \leq 5$. La seconde syzygy, $\mathfrak{F}$, étant unique et de degré 45. Soit, où $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_2, \ldots, X_{10}]$, avec $\deg X_i = i$,

$$0 \to \mathbb{C}[X]\mathfrak{F} \to \sum_{i=1}^{5} \mathbb{C}[X]\mathfrak{T}_i \to \sum_{i=1}^{5} \mathbb{C}[X]\mathfrak{R}_i \to \mathbb{C}[X] \to \mathcal{I}_8 \to 0$$

$$H(\mathcal{I}_8, t) = \frac{1 + t^8 + t^9 + t^{10} + t^{18}}{\prod_{d=2}^{7}(1 - t^d)} = \frac{1 - \sum_{d=16}^{20} t^d + \sum_{d=25}^{29} t^d - t^{45}}{\prod_{d=2}^{10}(1 - t^d)}$$

Octiques - Courbes de genre 3

Théorème (Shioda, 1967)

$\mathcal{I}_8 = \mathbb{C}[J_2, \ldots, J_{10}]$, avec $\deg J_i = i$ et $J_2, \ldots, J_7$ algébriquement indép. Il existe 5 relations entre ces générateurs, $\mathfrak{R}_i(J)$, de degré $15 + i$, $1 \leq i \leq 5$; liées par 5 premières syzygies $\mathfrak{T}_i(R)$, de degré $24 + i$, $1 \leq i \leq 5$. La seconde syzygy, $\mathfrak{F}$, étant unique et de degré 45. Soit, où $\mathbb{C}[X] = \mathbb{C}[X_2, \ldots, X_{10}]$, avec $\deg X_i = i$,

$$0 \to \mathbb{C}[X]\mathfrak{F} \to \sum_{i=1}^{5} \mathbb{C}[X]\mathfrak{T}_i \to \sum_{i=1}^{5} \mathbb{C}[X]\mathfrak{R}_i \to \mathbb{C}[X] \to \mathcal{I}_8 \to 0$$

$$H(\mathcal{I}_8, t) = \frac{1 + t^8 + t^9 + t^{10} + t^{18}}{\prod_{d=2}^{7}(1 - t^d)} = \frac{1 - \sum_{d=16}^{20} t^d + \sum_{d=25}^{29} t^d - t^{45}}{\prod_{d=2}^{10}(1 - t^d)}$$

- Invariants primaires : $J_2, \ldots, J_7$.
- Invariants secondaires : J_8, J_9, J_{10} et J_9^2.

Et en caractéristique positive ?

Théorème (Geyer, 1974)

Si k est un corps de caractéristique $p > n$, alors $\mathcal{I}_n(k) = \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}[1/n]) \otimes k$.

Et en caractéristique positive ?

Théorème (Geyer, 1974)

Si k est un corps de caractéristique $p > n$, alors $\mathcal{I}_n(k) = \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}[1/n]) \otimes k$.

- En genre 1 : $n = 4$. Pour $p = 3$, $\mathcal{I}_4 = k[a_2, \Delta]$.

Et en caractéristique positive ?

Théorème (Geyer, 1974)

Si k est un corps de caractéristique $p > n$, alors $\mathcal{I}_n(k) = \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}[1/n]) \otimes k$.

- En genre 1 : $n = 4$. Pour $p = 3$, $\mathcal{I}_4 = k[a_2, \Delta]$.
- En genre 2 : invariants d'Igusa (1960 - définis sur $\mathbb{Z}$ et valables en toute caractéristique).

Et en caractéristique positive ?

Théorème (Geyer, 1974)

Si k est un corps de caractéristique $p > n$, alors $\mathcal{I}_n(k) = \mathcal{I}_n(\mathbb{Z}[1/n]) \otimes k$.

- En genre 1 : $n = 4$. Pour $p = 3$, $\mathcal{I}_4 = k[a_2, \Delta]$.
- En genre 2 : invariants d'Igusa (1960 - définis sur $\mathbb{Z}$ et valables en toute caractéristique).
- En genre 3, la situation est plus délicate pour $p \in \{3, 5, 7\}$.

Genre 3 et $p \in \{3, 5, 7\}$

Le résultat de Shioda $\mathcal{I}_8 = k[J_2, \ldots, J_{10}]$ n'est a priori plus valable.

Génération des invariants fondamentaux :

- Algorithme de Kemper et Derksen (bases de Gröbner) : degré ≤ 8.
- Méthode à la Igusa en réduisant les invariants sur $\mathbb{C}$ couplée à de l'évaluation-interpolation.

Pour la caractéristique 3 : $j_2 = \frac{1}{3^2} J_2 = -a_0 a_8 - a_1 a_7 - a_2 a_6 - a_3 a_5 + a_4^2$, $j_3 = \frac{1}{3^4} J3$.
Mais $\frac{1}{3^4} J_4 = j_2^2$ et il faut considérer $j_4 = \frac{1}{3^5}(J_4 - \frac{1}{2^8} J_2^2)$.
On construit de cette façon $j_2, \ldots, j_{10}$ et ...

Genre 3 et $p \in \{3, 5, 7\}$

Le résultat de Shioda $\mathcal{I}_8 = k[J_2, \ldots, J_{10}]$ n'est a priori plus valable.

Génération des invariants fondamentaux :

- Algorithme de Kemper et Derksen (bases de Gröbner) : degré ≤ 8.
- Méthode à la Igusa en réduisant les invariants sur $\mathbb{C}$ couplée à de l'évaluation-interpolation.

Pour la caractéristique 3 : $j_2 = \frac{1}{3^2} J_2 = -a_0 a_8 - a_1 a_7 - a_2 a_6 - a_3 a_5 + a_4^2$,
$j_3 = \frac{1}{3^4} J3$.
Mais $\frac{1}{3^4} J_4 = j_2^2$ et il faut considérer $j_4 = \frac{1}{3^5}(J_4 - \frac{1}{2^8} J_2^2)$.
On construit de cette façon $j_2, \ldots, j_{10}$ et ...

$$j_{12} = \frac{1}{3^9}(243\, J_{10}\, J_2 + \ldots + \frac{30471680745011054594485 9}{112} J_2^6)$$

A priori : $\mathcal{I}_8(\mathbb{F}_3) = \mathbb{F}_3[J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_8, J_9, J_{10}, J_{12}]$.

Génération des relations et des syzygies :

- Les méthodes reposant sur les bases de Gröbner n'aboutissent pas.
- À nouveau, on utilise de l'évaluation-interpolation.

Résultats (degrés des relations et des syzygies) en car. 3 :

- 9 Relations : $12, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24$;
- 16 Syzygies 1 : $22, 23, 24, 25, 26, 27, 28^2, 29^2, 30, 31, 32, 33, 34, 35$;
- 9 Syzygies 2 : $33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 45$;
- Syzygie 3 : 57.

Génération des relations et des syzygies :

- Les méthodes reposant sur les bases de Gröbner n'aboutissent pas.
- À nouveau, on utilise de l'évaluation-interpolation.

Résultats (degrés des relations et des syzygies) en car. 3 :

- 9 Relations : $12, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24$;
- 16 Syzygies 1 : $22, 23, 24, 25, 26, 27, 28^2, 29^2, 30, 31, 32, 33, 34, 35$;
- 9 Syzygies 2 : $33, 34, 35, 37, 38, 39, 40, 41, 45$;
- Syzygie 3 : 57.

$$H(\mathcal{I}_8(\mathbb{F}_3), t) = \frac{1 + t^8 + t^9 + t^{10} + t^{18}}{\prod_{d=2}^{7}(1 - t^d)} = \frac{P(t)}{\prod_{d=2}^{10}(1 - t^d)(1 - t^{12})}$$

où $P(t) = 1 - t^{12} - t^{16} - t^{17} - t^{18} - t^{19} - t^{20} + t^{25} + t^{26} + 2t^{28} + \ldots + t^{57}$.

Système homogène de paramètres

Proposition

Pour $n \geq 3$, $I_1, \ldots, I_k$ est un système homogène de paramètres de $\mathcal{I}_n$ si et seulement si $\mathcal{V}(I_1, \ldots, I_k) = \{f \in V_n \;/\; I(f) = 0, \forall\, I \in \mathcal{I}_n\}$.

On peut tester la condition précédente via des calculs de bases de Gröbner, en se plaçant dans le quotient $\mathcal{I}_8/(\text{Relations})$.

En car. 3 : $\{J_2, J_4, J_5, J_7, J_9, J_{12}\}$ et 8 autres possibilité.

- $\mathcal{I}_8(\mathbb{F}_3)$ est un $\mathbb{F}_3[J_2, J_4, J_5, J_7, J_9, J_{12}]$-module libre de rang 30.
- Malgré l'écriture de la série de Hilbert $H(\mathcal{I}_8(\mathbb{F}_3), t) = \frac{1+t^8+t^9+t^{10}+t^{18}}{\prod_{d=2}^{7}(1-t^d)}$, $\{J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7\}$ n'est pas un système homogène de paramètres.

Conclusion

- Résultats similaires en car. 7 :
  $\mathcal{I}_8(\mathbb{F}_7) = \mathbb{F}_7[J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_8, J_9, J_{10}, J_{11}, J_{13}, J_{14}, J_{15}]$.
  Deg. des 26 relations :
  $11, 13, 14, 15, 16, 17, 18^2, 19, 20^2, 21, 22^2, 23, 24^2, 26^2, 28, 30$.
- La car. 5 est singulière avec 62 générateurs fondamentaux de degrés $1, 4, 6^2, 8^2, 9, 10^2, 11, 12^3, 13, 14^3, 15^3, 16^3, 17^3, 18^3, 19^2, 20^4, 21^4, 22^2, 23^2, 24^3, 25^3, 26, 27^2, 28^2, 29^2, 30, 31, 32, 33^2, 37$.
- La car. 2 est traitée via les modèles d'Artin-Schreier pour les courbes.

Conclusion

- Résultats similaires en car. 7 :
  $\mathcal{I}_8(\mathbb{F}_7) = \mathbb{F}_7[J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_8, J_9, J_{10}, J_{11}, J_{13}, J_{14}, J_{15}]$.
  Deg. des 26 relations :
  $11, 13, 14, 15, 16, 17, 18^2, 19, 20^2, 21, 22^2, 23, 24^2, 26^2, 28, 30$.
- La car. 5 est singulière avec 62 générateurs fondamentaux de degrés $1, 4, 6^2, 8^2, 9, 10^2, 11, 12^3, 13, 14^3, 15^3, 16^3, 17^3, 18^3, 19^2, 20^4, 21^4, 22^2, 23^2, 24^3, 25^3, 26, 27^2, 28^2, 29^2, 30, 31, 32, 33^2, 37$.
- La car. 2 est traitée via les modèles d'Artin-Schreier pour les courbes.

- Ce qu'il reste à faire : reconstruction, détermination de la stratification de l'espace de module selon le groupe d'automorphismes.